E. HAENTZSCHEL

DAS ERDSPHÄROID

UND SEINE ABBILDUNG

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen, sowie ein Generalregister zu obigen Bänden bringen wird.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik**, Organ für angewandte Mathematik, die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, ferner **Natur und Schule**, Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen, die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese „Mitteilungen“, welche unentgeltlich in 25 000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte jährlich zwei- bis dreimal neu gedruckte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], sowie der Nachtrag 1901—1903 [XII u. 56 S.] zu diesem Katalog in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

G
H

DAS ERDSPHÄROID UND SEINE ABBILDUNG

VON

E.R.

DR. EMIL HAENTZSCHEL
PROFESSOR AN DER KGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE
UND AM KÖLLNISCHEN GYMNASIUM ZU BERLIN.

MIT 16 TEXT-ABBILDUNGEN.

91917
17/9/08

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1903.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESZLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Der Ausgang der siebenziger Jahre des vorigen Jahrhunderts ist für die *Kartenentwurfslehre* in mehr als einer Hinsicht bemerkenswert gewesen. Hatte man es bisher in den wissenschaftlichen Lehrbüchern über Kartenprojektion für notwendig gehalten, eine möglichst vollständige Übersicht über alle je ersonnenen Methoden der Projektion der Erdoberfläche auf die Ebene zu geben, so beginnt jetzt die Erkenntnis aufzugehen, daß man einen Unterschied machen müsse zwischen den verschiedenen Entwürfen, und daß man von allen nur die für die *Geographie* wichtigen einer eingehenden Behandlung zu unterwerfen habe. Man fängt an einzusehen, daß man streng teilen müsse zwischen Landkarten einerseits und Generalstabskarten und Meßtischblättern andererseits; für jene, im Maßstabe 1 : 1 000 000 bis 1 : 10 000 000, genügt es die Erde als Kugel anzusehen, für diese, im Maßstabe 1 : 15 000 bis 1 : 150 000, ist die Exzentrizität des Erdsphäroids bei der Konstruktion der Karte zu berücksichtigen. Wenn *Wiechel* in seinem Aufsatze: *Rationelle Gradnetzprojektionen* (in der Zeitschrift: *Der Civil-Ingenieur*, 1879, S. 420 ff.) gerade dieses Moment betont, so erwirbt sich ganz besonders *Tissot* durch sein Werk: *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, Paris 1881, das große Verdienst, eine kritische Untersuchung der verschiedenen Gradnetzentwürfe für Landkarten angestellt und als der erste sie nach ihren Verzerrungsverhältnissen gewürdigt zu haben. Den neuen *Tissot*schen Standpunkt macht namentlich Herr *Hammer* (*Die geographisch wichtigsten Kartenprojektionen*, Stuttgart, 1889, Metzler) zum Gegenstand von wichtigen Untersuchungen; er wird in der zweiten Auflage von *Zöppritz' Leitfaden der Kartenentwurfslehre* (Leipzig, 1899, Teubner) durch den Herausgeber, Herrn *Bludau*, vertreten.

Aber noch ein anderes Moment ist für die Kartographie

von der größten Bedeutung geworden. *Preußen* hatte sich bald nach 1866 entschlossen, die von *Gauß* für das einstmalige Königreich Hannover ersonnene konforme Doppelprojektion für die Kartierung des Landes im Maßstabe 1 : 25 000 anzunehmen. Im Jahre 1878 erweiterte sich das Unternehmen zur Herstellung von *Generalstabskarten* (1 : 100000) und *Meßtischblättern* (1 : 25000) *für das ganze Deutsche Reich.* Generalleutnant Dr. *Schreiber*, der einst in Hannover die *Gauß*schen Arbeiten vor der Vergessenheit bewahrt hatte, trat später in Preußen an die Spitze der königlichen Landesaufnahme und sorgte rastlos für die theoretische und die praktische Ausgestaltung des groß angelegten Werkes. Noch nach seinem Dienstaustritt war er tätig durch Veröffentlichung von: *Tafeln und Formeln*, Berlin, 1897.

Eine kürzere wissenschaftliche Darstellung, die von der kgl. Landesaufnahme selbst ausgeht und *im Zusammenhange* die Herleitung aller Formeln gibt, existiert leider nicht. Wohl aber kann man durch *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, 4. Aufl., Stuttgart, 1893—1896, zwar in verschiedenen Kapiteln zerstreut, einen Einblick in das Unternehmen erhalten. Es erschien mir deshalb des Strebens wert, eine einfach gehaltene Einführung in das Verständnis dieses deutschen Kartenwerkes zu versuchen. Ein äußerer Anlaß dazu fehlte nicht.

Seit mehreren Jahren als Dozent an dem vom Unterrichtsministerium eingerichteten „Wissenschaftlichen Kursus zur Ausbildung von Seminarlehrern" tätig, fiel mir hier unter anderem die Aufgabe zu, analytische Geometrie und die Elemente der höheren Analysis mit besonderer Rücksicht auf deren Anwendung in Mechanik, mathematischer Physik und *Kartographie* zu lehren. Das lebhafte Interesse, welches von meinen Zuhörern gerade dem zuletzt genannten Gegenstande entgegengebracht wurde, äußerte sich auch in dem Wunsche, später, nach Rückkehr in das Amt, durch das Studium von Büchern das Gehörte zu vertiefen und zu befestigen.

Unsere mathematische Literatur ist reich an Lehrbüchern, die den verschiedensten Anforderungen gerecht werden, aber ein Buch von geringem Umfange, das unserem großen deutschen Kartenwerke gewidmet ist, fehlt. Es hat dies seinen guten Grund. Der Mathematiker macht gern ganze Arbeit; er glaubt bei einem Gegenstande, wie dem genannten, von einem Kapitel über die geodätische Linie auf dem Sphäroid nicht absehen zu dürfen; er glaubt die Kenntnis der modernen Funktionentheorie

nicht entbehren zu können. Nachdem aber durch Herrn *Hammer* eine 1807 erschienene Abhandlung von *Mollweide* zu neuem Leben erweckt worden ist, die den Beweis erbringt, daß unser Abbildungsproblem schon *vor Gauß*, und zwar *ohne Anwendung der imaginären Größen*, in Angriff genommen ist, lag die Versuchung nahe, alles zu schildern bis an jene charakteristische Grenze: *die geodätische Linie*.

So entstand aus mehr skizzenhaft gehaltenen Vorträgen dieses Buch. Ob der Versuch gelungen, werden andere beurteilen. Aber ich glaube, daß der Grundsatz: Alles oder Nichts! hier nicht gelten darf; ist doch vielen schon mit einem Teile gedient. Von meinen oben genannten Zuhörern darf ich es sicher sagen; ich frage, ob es nicht vielleicht auch anderswo Geltung hat.

Es sei gestattet, eine Parallele zu ziehen. Die Chemie hat in neuerer Zeit einen starken mathematischen Einschlag erhalten, wovon die Lehrbücher von Nernst, van t'Hoff, Ostwald u. a. Zeugnis ablegen. Die Abteilung für Chemie und Hüttenkunde der hiesigen kgl. Techn. Hochschule hat deshalb seit mehreren Jahren die Einrichtung getroffen, den Studierenden durch ein ein-semestriges, vierstündiges Kolleg über die Elemente der analytischen Geometrie, der Differential- und Integralrechnung Gelegenheit zu geben, sich mit dieser Seite der modernen Chemie bekannt zu machen. Im Sommersemester wird das Vorgetragene durch ein Kolleg über die Elemente der Mechanik und durch ein solches über darstellende Geometrie ergänzt; später folgt die Einführung in die physikalische Chemie. Die zwei zuerst genannten Kollegien werden von mir gehalten.

Sind die *Geographen* nicht in derselben Lage? Mehr und mehr wird die Erdkunde eine naturwissenschaftliche Disziplin. Immer stärker wird der Einfluß, welchen Geologie und Physik, Meteorologie und Klimatologie auf dieselbe ausüben. Ein Handbuch wie *Siegmund Günthers Geophysik* muß aber, was einzelne Kapitel betrifft, jedem Geographen unverständlich bleiben, der nicht auf der Universität Gelegenheit gehabt hat, sich mit höherer Analysis bekannt zu machen. Die Bedürfnisse des Studierenden der Erdkunde sind aber nicht so umfassend wie die des Mathematikers; die Kollegia, welche für diesen sich eignen, sind zu weitgehend für jenen. Sollte man deshalb nicht darauf bedacht sein, die Kategorie des „nicht mathematisch gebildeten Geographen“ durch die Einrichtung eines Kollegs über

die Elemente der höheren Analysis, ähnlich dem an unserer Technischen Hochschule bestehenden, zum Verschwinden zu bringen? Kartographische Übungen müßten dann als Anwendung und Ergänzung folgen. Denn, wie kann jemand das Kartenzeichnen lehren wollen, wenn er sich die mathematischen Grundlagen desselben nicht zu eigen gemacht hat? Die Zahl derer, die einen Gradnetzentwurf zu beurteilen imstande sind, ist, so will mir scheinen, in der Abnahme begriffen. Es hat dies seinen Grund wohl darin, daß mathematische Kenntnisse sich bei vielen schnell verflüchtigen. Herr *P. Güßfeldt* widmet dieser Erscheinung im *Vorwort* zu seinem Werke: Geographische Ortsbestimmung (Braunschweig 1902, Vieweg & Sohn) bewegte Worte. Wenn dieselben, man darf wohl sagen, in der Forderung gipfeln: Mehr Mathematik!, die doch in erster Linie an die Geographen ergeht, so ist vor allem sein Vorgehen freudig zu begrüßen, ihnen die Wege zur Vertiefung ihres mathematischen Könnens und Wissens zu ebnen.

Dieses Buch setzt, wie man bemerken wird, eine größere Summe von Kenntnissen aus der Mathematik voraus; ich meine jedoch, es ist nicht mehr, als man dem mathematisch vorgebildeten *Geographen* zumuten darf.

Endlich wollen wir noch kurz des *Mathematikers* gedenken. Möchte diese Monographie viele von ihnen veranlassen, ihr Interesse auch der angewandten Mathematik zuzuwenden, ganz besonders der Geodäsie, deren Hauptwerke: *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, und *Helmert*, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Leipzig, B. G. Teubner, 1880—1884, hiermit zum Studium bestens empfohlen seien.

Zum Schluß erfülle ich die angenehme Pflicht, meinem geschätzten Kollegen, Herrn Professor *P. Crantz*, für die Unterstützung bei dem Lesen der Korrektur und bei der Revision der Druckbogen aufrichtig zu danken.

Berlin, den 30. Juni 1903.

Haentzschel.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Über das Erdsphäroid.

Seite

§ 1. Aufgabe der Kartenentwurfslehre. Verebenung des Sphäroids . 1
§ 2. Das Geoid; das ideale Erdsphäroid. Verschiedene Erdmessungen. Bessels Werte der Erddimensionen 1
§ 3. Gradeinteilung des Erdellipsoids: geographische, geozentrische und reduzierte Breite; geographische Länge. 5
§ 4. Abbildung des Erdsphäroids auf einer Kugel vermittels der reduzierten Breiten. Koordinatenbestimmung durch diese. . . 7
§ 5. Größter Unterschied zwischen geographischer und reduzierter Breite 11
§ 6. Berechnung der reduzierten und der geozentrischen Breite. Größter Unterschied zwischen geographischer und geozentrischer Breite. Analytischer Zusammenhang zwischen den drei Breiten. Entfernung eines Ortes auf der Erdoberfläche vom Mittelpunkte der Erde 14
§ 7. Tafel der reduzierten Breiten. Literarisches 19
§ 8. Verzerrung durch die Abbildung vermittelst der reduzierten Breiten. Anwendung auf das Globusproblem 21
§ 9. Bogenelement und Krümmungsradius des Meridians unter verschiedenen Breiten 23
§ 10. Länge eines Meridiangrades, Abplattung des Meridians. Berechnung der französischen Gradmessung in Peru und in Lappland 28
§ 11. Länge des Meridianbogens als Funktion der reduzierten Breite. 32
§ 12. Berechnung der Länge eines Meridiangrades unter verschiedenen Breiten. Tafel der Gradbögen 37
§ 13. Länge des Meridianbogens als Funktion der geographischen Breite 39
§ 14. Vergleichung der Meridianbögen des Erdsphäroids mit denen, die ihnen auf der ihm eingeschriebenen Kugel entsprechen. Das Längen- oder Vergrößerungsverhältnis 43
§ 15. Länge der Parallelkreisbögen unter verschiedenen Breiten. . . 44
§ 16. Oberfläche einer Zone des Erdsphäroids als Funktion der reduzierten Breite. Flächentreue Abbildungen. Die Abbildung vermittelst der reduzierten Breiten gehört nicht zu ihnen 48
§ 17. Oberfläche einer Zone des Erdsphäroids als Funktion der geographischen Breite: *Grunerts* Formel. Oberfläche und Radius einer mit dem Sphäroid flächengleichen Kugel. Größe einer Gradmasche in verschiedenen Breiten 52
§ 18. Sphäroidischer Inhalt einer Sektion der deutschen Generalstabskarte; Beispiele. Sphäroidischer Inhalt eines Meßtischblattes der deutschen Landesaufnahme in verschiedenen Breiten . . . 59

Zweites Kapitel.

Die flächentreue und die winkeltreue Abbildung des Erdsphäroids auf einer Kugel. Die konforme Doppelprojektion der königlich preußischen Landesaufnahme. Die Generalstabskarte und das Meßtischblatt.

Seite

§ 1. Flächentreue Abbildung des Erdsphäroids auf einer Kugel. Bestimmung der Kugelbreite als Funktion der geographischen Breite 63

§ 2. Verzerrung auf der Kugel. 67

§ 3. Bestimmung des Vergrößerungsverhältnisses für zwei einander entsprechende Meridianbogenelemente. Geschlossener Ausdruck für die Kugelbreite als Funktion der geographischen Breite . 68

§ 4. Bestimmung des Vergrößerungsverhältnisses für zwei einander entsprechende Parallelkreisbogenelemente. Definition der flächentreuen Abbildung mit Hilfe der Verzerrungsellipse . . 72

§ 5. Winkeltreue Abbildung des Erdsphäroids auf der *Mollweide*schen Normalkugel. Formel für die Kugelbreite in geschlossener Form 80

§ 6. *Lagranges* Behandlung der Gleichung $\operatorname{tg} x = \cos \omega \cdot \operatorname{tg} y$ . . . 84

§ 7. Entwickelung der Kugelbreite in eine Reihe. Größter Unterschied zwischen Kugelbreite und geographischer Breite. Tafel der Kugelbreiten 87

§ 8. Die Verzerrungsellipse ist bei der winkeltreuen Abbildung ein Kreis 92

§ 9. Krümmungsradius an einer beliebigen Stelle des Sphäroids für ein beliebiges Azimut. Der mittlere Krümmungshalbmesser. . 96

§ 10. Übergang von der *Mollweide*schen zur *Gauß*schen Kugel. Wert des Vergrößerungsverhältnisses 98

§ 11. Die drei *Gauß*schen Bedingungen. Berechnung der Fundamentalgrößen der *Gauß*schen Kugel 102

§ 12. Übergang vom Erdsphäroid zur *Gauß*schen Kugel und umgekehrt 109

§ 13. Tafel für den Logarithmus des Vergrößerungsverhältnisses. Fundamentalgrößen von *Gauß*schen Kugeln mit anderem Parallelkreis als dem von *Gauß* gewählten 118

§ 14. Konforme Doppelprojektion der königlich preußischen Landesaufnahme. *Mercators* Projektion 121

§ 15. Erweiterte *Mercators*che Projektion, um von der *Gauß*schen Kugel zur Ebene überzugehen. Ihre Anwendung bei der Landesaufnahme des *Deutschen Reiches* zur Herstellung von Generalstabskarten und Meßtischblättern 128

§ 16. Berechnung des Gradnetzes eines Meßtischblattes, erläutert am Blatt „*Teltow*“ (Grunewald bei Berlin) 133

Erstes Kapitel.

Über das Erdsphäroid.

§ 1. Die *Vielflächner* oder *Polyeder* gehören zu denjenigen Körpern, deren Oberfläche sich auf einer Ebene ausbreiten läßt; sie haben eine *abwickelbare Oberfläche*. Ihnen reihen sich an der *gerade Zylinder*, dessen krumme Oberfläche sich zu einem Rechteck, der *gerade Kegel*, dessen Oberfläche sich zu einem Kreissektor, und der *gerade Kegelstumpf*, dessen Oberfläche sich zu einem Kreisringsektor abwickeln läßt. Nicht aber gehört zu dieser Klasse von Körpern die *Kugel*, das *Rotationsellipsoid* oder *Sphäroid* und das *dreiachsige Ellipsoid*; die krumme Oberfläche dieser Körper läßt sich *nicht* in einer Ebene ausbreiten. Beabsichtigt man trotzdem in einer *ebenen Zeichnung* ein Abbild der Oberfläche eines dieser soeben genannten Körper, einschließlich der auf ihnen etwa vorhandenen Figuren, zu geben, so bedarf man zu dieser *Verebenung* eines größeren mathematischen Apparates. Es stellt sich, wenn es sich insbesondere um das *Sphäroid* handelt, die Mathematik in den Dienst der Erdkunde. Beide Wissenschaften vereinigen sich zu einem Zweige der *angewandten Mathematik*; sie bilden *die Lehre von den Kartenprojektionen* oder *die Kartenentwurfslehre*. Eine kurze Darstellung der hauptsächlichsten Resultate dieser letzteren zu geben, insofern sie die Erde *nicht als eine Kugel* ansieht, sondern *ihre sphäroidale Gestalt* in die Rechnung einführt, ist das Ziel der folgenden Betrachtungen.

§ 2. Auf die Gestalt der Erde richten wir zuerst unser Augenmerk. Bezeichnet man als *die physische Oberfläche der Erde* die Begrenzungsfläche zwischen den starren und den tropfbarflüssigen Teilen der Erde einerseits und der Atmosphäre andererseits, so definiert man damit die Oberfläche eines Körpers, der

sich der mathematischen Analyse gar nicht oder nur sehr schwer unterwerfen läßt. Die Erdmessungen beziehen sich daher, man kann wohl sagen seit den ältesten Zeiten, auf eine Erdfläche, die *Listing* das *Geoid* genannt hat (1873), und von der er folgendes aussagt: „Die Oberfläche des gesamten Meeres in seinem Gleichgewichtszustande, also ohne Ebbe, Flut und Wellenschlag, denke man sich unter den Kontinenten durch ein Netz von Kanälen fortgesetzt, die unter sich und mit dem Meere in Verbindung stehen, so wird diese Fläche, das Geoid, dem hydrostatischen Gesetz der ruhenden Flüssigkeiten entsprechend, alle Lotlinien, die doch die Richtung der *Schwerkraft* anzeigen, rechtwinklig durchschneiden." Da die Abweichungen dieses Geoids von einem Umdrehungsellipsoid im Vergleich mit den Erddimensionen, soweit bis jetzt unsere Kenntnisse reichen, nur klein sind, z. B. in Deutschland nach den Bestimmungen von *Helmert* (1888) etwa 5—10 Meter betragen, so kann man *an die Stelle des Geoids ein ideales Erdsphäroid* setzen und auf dessen Bestimmung ausgehen. Freilich hat es etwa 150 Jahre gedauert, bis man sich zu so klaren Anschauungen über unseren Planeten durchgerungen hat. Kosmologische Hypothesen einerseits, Tatsachen der Gradmessung andererseits führten die Beweiskraft solcher Schlußfolgerungen erst ganz allmählich herbei.

Bekanntlich lehrt die *Kant-Laplace*sche Hypothese über die Entstehung unseres Sonnensystems, daß sich im Verlaufe von Äonen von Jahren von einer Zentralsonne die einzelnen Planeten abgesondert haben. Es vergehen nun Millionen Jahre, da findet sich die Erde als feurig-flüssiger Weltkörper vor, aus einer weichen Masse bestehend, die in Rotation um eine Achse begriffen ist. Nach physikalischen Gesetzen, die durch Versuche, wie die von *Plateau* (geb. 1801 zu Brüssel, gest. 1883 als Professor der Physik zu Gent) beschriebenen[1]), erhärtet werden können, nimmt ein solcher Körper eine *ellipsoidische Gestalt* an mit einer an den Enden der Drehungsachse, den *Polen*, vorhandenen Abplattung. Jede *Meridianebene*, das ist irgend eine Ebene, welche die Erdachse ganz in sich aufnimmt, hat also eine *Ellipse* als

1) Vergl. A. *Wüllner*, Experimentalphysik, Bd. I, Mechanik. Leipzig, B. G. Teubner.

Begrenzungslinie. Und vielleicht gilt dies auch von der *Äquatorialebene* und den *Parallelkreisebenen*, das sind Ebenen, die senkrecht auf der Drehungsachse stehen, und zwar die zuerst genannte genau in der Mitte derselben. Unser feurig-flüssiger Körper kann nämlich möglicherweise die Gestalt eines dreiachsigen Ellipsoids haben, eine Annahme, die dadurch einige Wahrscheinlichkeit erhält, daß der Mathematiker *C. G. J. Jacobi* (geb. 1804 in Potsdam, 1827 Professor in Königsberg, gest. 1851 in Berlin) im Jahre 1834 mit Hilfe der höheren Mathematik zeigte, ein dreiachsiges Ellipsoid könne sehr wohl die Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse sein.

Bei dem Mangel an sicheren Angaben über die Maßverhältnisse für die ozeanischen Erdseiten ist es bis zum heutigen Tage noch nicht möglich gewesen festzustellen, ob die Erde nicht bloß am Nordpol und am Südpol, sondern auch an den Enden ihrer äquatorialen Querachsen abgeplattet ist, ob sie also ein massives dreiachsiges Ellipsoid, oder ob sie, wie man seit der Mitte des 18. Jahrhunderts annimmt, nur ein *Rotationsellipsoid* ist. In letzterem Falle würde es sich um einen Körper handeln, den man sich durch die Drehung einer Halbellipse um ihre kleine Achse, die hier der Erdachse entspricht, entstanden zu denken hätte. Aus dieser Unbestimmtheit führte uns *Listing* heraus, indem er der Forschung den Zielpunkt wies, durch Definition seines Geoids, von dem aus er den Weg zum *idealen Erdsphäroid* fand. Diesem allein wollen wir von nun an unsere Betrachtungen widmen.

Verschiedene Breitengradmessungen auf der Erde hatten nämlich ergeben, daß die Meridiangrade nicht an allen Teilen der Erde von gleicher Länge sind, wie es bei Voraussetzung der Kugelgestalt derselben doch der Fall sein müßte. So führten von 1735—1744 in *Peru*, etwa vom 3. Grad südlicher Breite bis zum Äquator *Bouguer* und *La Condamine*, in *Lappland* von 1736—1737 *Maupertuis*, *Clairault* und *Celsius* Messungen aus, die zur Berechnung einer Erdabplattung von 1 : 310 führten (s. § 10). Von 1792—1808 fand die zweite französische Gradmessung durch *Delambre* und *Méchain* statt, auf die sich die Feststellung des Meters gründete (vergl. *Siegmund Günther*, Geophysik, Bd. I).

Eine Längengradmessung wurde von 1811—1825 längs des 45. Parallelkreises von der Mündung der Gironde durch Frankreich über Turin und Mailand bis Fiume durch französische, österreichische und piemontesische Gelehrte und Offiziere ausgeführt. Aber alle diese und auch fernere Gradmessungen zeigten leider keinerlei Übereinstimmung in den Resultaten, so daß es nicht möglich war, die genaue Form einer Meridianellipse festzustellen. Die folgende Tabelle zeigt einige rechnungsmäßige Ergebnisse der verschiedenen Messungen.

		Meridianquadrant Q in Metern	Abplattung
1806	Delambre	10 000 000	1 : 334
1830	Schmidt	10 000 075	1 : 297,65
1830	Airy	10 001 012	1 : 299,3
1841	Bessel	10 000 856	1 : 299,15
1866	Clarke	10 001 888	1 : 294,98
1872	Listing	10 000 218	1 : 289
1880	Clarke	10 001 869	1 : 293,47

1884 leitete *Helmert* (Geheimer Regierungsrat, Professor, Direktor des geodätischen Instituts in Potsdam bei Berlin) aus 122 Pendellängen-Messungen den Abplattungswert $\frac{1}{299{,}26 \pm 1{,}3}$ ab; nach ihm dürfte die Abplattung keinesfalls größer als 1 : 296 sein.

Am bekanntesten sind die *Besselschen Bestimmungen der Dimensionen des Erdsphäroids* geworden. Nach ihm ist

die *halbe große Achse der Meridianellipse* $a = 6\,377\,397{,}155$ m,
es ist dies der Radius des Äquators,
die *halbe kleine Achse der Meridianellipse* $b = 6\,356\,078{,}96$ m,
die *Abplattung* $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299{,}15}$,
der *Umfang* der Erde *im Aquator* $2\pi a = 40\,070\,368{,}10$ m,
„ „ „ „ „ *Meridian* $4Q = 40\,003\,423{,}05$ m,
ein *Grad des Äquators* $\frac{2\pi a}{360} = 111\,306{,}58$ m,
eine *geographische Meile* $\frac{2\pi a}{15 \cdot 360} = 7\,420{,}44$ m,

eine *Seemeile* $= 1'$ des mittleren

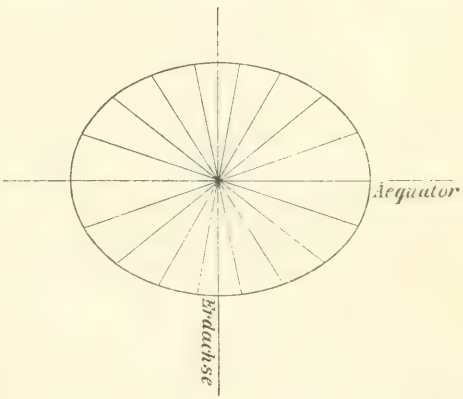
Erdumfangs $\frac{2\pi}{60 \cdot 360}\left(\frac{a+b}{2}\right) =$ 1 852 m,

der Radius der Kugel, die mit dem

Erdsphäroid gleiche Oberfläche hat, $=$ 6 370 289,511 m.

Höchst wahrscheinlich ist der *Bessel*sche Wert für a um etwa 1 : 8000 zu klein und durch den von *Clarke* 1866 ermittelten $a = 6\,378\,200$ m zu ersetzen; wir werden jedoch im folgenden stets die *Bessel*schen Angaben zu Grunde legen (Friedr. Wilh. *Bessel*, der berühmte Königsberger Astronom, geb. 1784, gest. 1846).

§ 3. Aus den vorstehenden Zahlenangaben geht hervor, daß die *Meridiangrade* des Erdellipsoids nicht, wie die der Kugel, einander gleich sein können; man bedarf deshalb einer besonderen Festsetzung für die Größe eines solchen. Eine Breitengrad-Einteilung der Erde könnte man nämlich in *dreifacher* Hinsicht bewirken. Stellt die nebenstehende Fig. 1 die Meridianellipse vor, so könnte man *erstens* vom Mittelpunkte derselben Fahrstrahlen *in gleichen Winkelabständen* (in der Figur um je 20° gegeneinander geneigt!) ziehen. Den Neigungswinkel eines Radius gegen die Äquatorebene nennt man die *geozentrische Breite* des Ortes, der am Endpunkte des Fahrstrahls auf der Erdoberfläche liegt. Dadurch werden die hierdurch abgeteilten Meridianbögen in der Nähe der Pole *kleiner* als in der Nähe des Äquators. *Zweitens* könnte man den Umfang der Meridianellipse vom Äquator bis zum Pol in gleiche Teile, also *nach gleichen Bogenstücken* teilen. Aber weder das eine noch das andere hat man gewählt; das letztere nicht wegen der großen Schwierigkeit, womit ein genaues Messen größerer Längen auf der Erdoberfläche verbunden ist.



Figur 1.

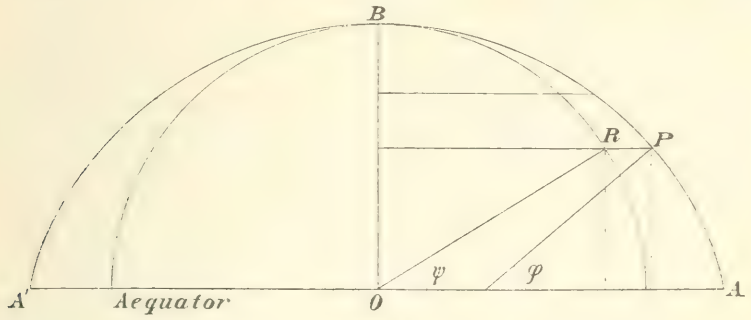
In Wirklichkeit geschieht *die Gradeinteilung eines Meridians*

des Erdsphäroids *nach gleichen Winkelabständen der* von der Erdoberfläche ausgehenden *nach dem Innern der Erde gerichteten Lotlinien*. Die Neigung der zu verschiedenen Orten auf der Erde gehörenden Lote gegen die Äquatorebene oder gegen die Erdachse wird gemessen, indem man die Lage dieser Lotlinien mit Hilfe scharfsinniger Beobachtungsmethoden der Astronomie mit den Fixsternen in Beziehung bringt. Wäre die Erde eine Kugel, so würden sich die gedachten Lote sämtlich im Kugelmittelpunkte treffen.

Definieren wir zuerst als einen *Meridian* die zwischen den beiden Polen der Erde liegende *Hälfte einer Ellipse*, die man erhält, wenn man durch die Drehungsachse des Sphäroids eine beliebige Ebene legt. In der Praxis wird diese Halbellipse gefunden durch die Verbindungslinie der Orte gleichzeitiger Kulmination eines Sternes. Im besondern gilt auf Grund einer Übereinkunft derjenige Meridian als *Nullmeridian*, der durch den Pfeiler des Meridianinstrumentes der *Sternwarte zu Greenwich* bei London geht (Länge: $0^0\,0'\,0''$; nördl. Breite: $51^0\,28'\,38{,}1''$). Die große Achse dieser Schnittellipse, also die Verbindungslinie ihrer Durchschnittspunkte mit der Äquatorebene teilt den Meridian in zwei gleiche Teile, in einen positiven und in einen negativen Meridianquadranten. Errichten wir alsdann in einem beliebigen Punkte eines Meridianquadranten die Normale auf der Ellipse, also in der Wirklichkeit etwa das Lot auf der Meeresoberfläche, so ist *die Breite* φ *dieses Punktes des Erdellipsoids* der 90^0 nicht übersteigende, als *positiv* oder *negativ* zu betrachtende Winkel, unter dem die Normale im Meridianpunkte gegen die große Achse der Meridianellipse geneigt ist.

Denkt man sich jetzt *in das Erdellipsoid*, und zwar um seinen Mittelpunkt mit seiner Drehungsachse als Durchmesser, *eine Kugel beschrieben*, so heißt der 90^0 nicht übersteigende Winkel, unter dem der nach einem beliebigen Punkte der Oberfläche dieser Kugel gezogene Radius gegen die Ebene des Äquators geneigt ist, *die reduzierte Breite* (auch *korrigierte* Breite!) ψ aller derjenigen Punkte auf der Oberfläche des Erdsphäroids, die von der Ebene des Äquators *ebensoweit entfernt* sind, wie der in Rede stehende Punkt der Kugeloberfläche von derselben Ebene (Figur 2).

Gelingt es also auf Grund mathematischer Formeln eine Beziehung zu finden zwischen der geographischen Breite φ und der reduzierten Breite w eines und desselben Punktes der Schnittellipse des Rotationsellipsoids, so ist damit ein Zusammenhang



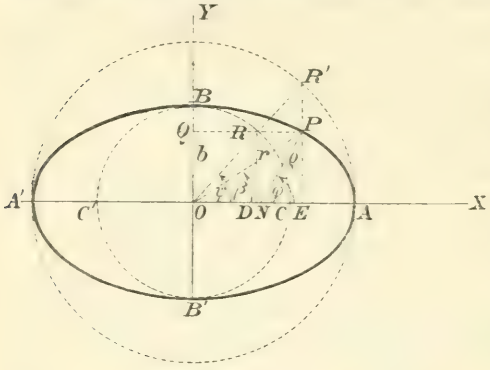
Figur 2.

konstruiert zwischen den Punkten des Erdsphäroids einerseits und jener Kugel andererseits. Fügen wir nämlich noch den Begriff der *geographischen Länge* eines Punktes der Oberfläche des Sphäroids hinzu, als den *auf dem Äquator* von 0^0 bis 360^0 *gezählten Bogen*, gerechnet vom Schnittpunkt des Greenwicher Meridians mit dem Äquator als dem *Nullpunkte*, so gelingt leicht *eine Zuordnung*, und zwar Punkt für Punkt, *der Oberfläche von Erdellipsoid und Kugel* für Punkte gleicher Länge. Man sagt, man könne *das Erdsphäroid auf der Kugel abbilden*.

§ 4. Die Untersuchung, die wir anstellen wollen, vereinfacht sich dadurch bedeutend, daß wir nur Punkte *gleicher* geographischer *Länge* einander zuzuordnen haben. Statt eines Problems der analytischen Geometrie des Raumes haben wir nur ein solches der Ebene vor uns; man hat Meridianellipse und größten Kugelkreis, die in derselben Schnittebene liegen, miteinander in Beziehung zu setzen. Wir legen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde, das durch den Mittelpunkt der Ellipse geht und die Achsen derselben zu Koordinatenachsen hat. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist, wie bekannt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Sei $P(u, v)$ ein beliebiger Punkt der Ellipse, so ist die Gleichung der Normale PN in diesem Punkte (Figur 3)



Figur 3.

$$PN\} \quad y - v = \frac{a^2 v}{b^2 u}(x - u).$$

AA' ist die Durchschnittskante der Ebene des Äquators mit der von uns willkürlich herausgegriffenen Meridianebene $ABA'B'$. Also ist N der Schnittpunkt der Normale mit dem Äquator. Die Ordinate von N ist Null, während die Abscisse von N durch Einsetzen von $y = 0$ in die Gleichung von PN erhalten wird.

$$N\} \quad u_1 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) u; \quad v_1 = 0.$$

Führt man die Bezeichnungen ein

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \varepsilon_1^{\,2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2},$$

wo die absolute Zahl ε *die numerische Exzentrizität* der Ellipse heißt, während

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

die lineare Exzentrizität ist, so sind die Koordinaten von N:

$$N\} \quad u_1 = \varepsilon^2 \cdot u; \quad v_1 = 0.$$

Also schneidet die Vertikallinie des Beobachtungsortes P die Äquatorialebene in einem Punkte N, *der um $\varepsilon^2 \cdot u$ von dem Erdmittelpunkte O entfernt ist.*

Die Strecke $PN = \varrho$ ist gegeben durch

$$\varrho^2 = (u - u_1)^2 + (v - v_1)^2$$
$$\varrho^2 = (1 - \varepsilon^2)^2 u^2 + v^2$$
$$\varrho^2 = \frac{b^4}{a^4} u^2 + v^2$$
$$\varrho = \frac{\sqrt{b^4 u^2 + a^4 v^2}}{a^2}.$$

Ist $\sphericalangle PNA = \varphi$, so ist auf Grund der gegebenen Erklärung

φ die geographische Breite und $\sphericalangle ROA = \psi$ die reduzierte Breite des Punktes P. Da nun P und R denselben Abstand vom Äquator, also dieselbe Ordinate v haben sollen, so ist einerseits im Dreieck NPE:

$$v = \varrho \cdot \sin \varphi$$

und andererseits im Dreieck ORD

$$v = b \cdot \sin \psi .$$

Setzen wir den ersten Wert in die Gleichung für ϱ^2 ein:

$$\varrho^2 = \frac{b^4}{a^4} u^2 + v^2,$$

so ist

$$\varrho^2 = \frac{b^4}{a^4} u^2 + \varrho^2 \sin^2 \varphi$$

$$\varrho^2 \cos^2 \varphi = \frac{b^4}{a^4} u^2,$$

daher

$$u^2 = \frac{a^4}{b^4} \varrho^2 \cos^2 \varphi ; \quad u = \frac{a^2}{b^2} \varrho \cos \varphi .$$

Insofern nun der Punkt P der Ellipse angehört, also für ihn die Gleichung gilt

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 ,$$

ist man im stande zuerst ϱ und alsdann u und v als Funktionen von a, b und φ darzustellen. Setzen wir die erhaltenen Werte von u^2 und v^2 in die letzte Gleichung ein, so ist

$$\frac{a^2}{b^4} \cdot \varrho^2 \cos^2 \varphi + \frac{\varrho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1$$

$$\varrho^2 = \frac{b^4}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} .$$

Führt man hierin zuerst ε^2 und darauf ${\varepsilon_1}^2$ ein, so erhält man

$$\varrho^2 = \frac{b^4}{a^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} ,$$

bezw.

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{1 + {\varepsilon_1}^2 \cos^2 \varphi} .$$

Hieraus aber leitet man ab:

$$u^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} ,$$

$$u^2 = \frac{a^2}{1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 \varphi} ,$$

$$u^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi},$$

$$u^2 = \frac{a^4 \cos^2 \varphi}{b^2 \, 1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}.$$

Ebenso findet man

$$v^2 = \frac{b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

$$v^2 = \frac{b^2}{1 + \frac{a^2}{b^2} \cot^2 \varphi},$$

$$v^2 = \frac{b^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \, 1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi},$$

$$v^2 = \frac{b^2 \sin^2 \varphi}{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}.$$

Demnach erhält man endgültig, da nach der Erklärung $\cos \varphi$ stets positiv ist und v und $\sin \varphi$ offenbar immer dasselbe Vorzeichen haben müssen,

$$u = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{bezw.} \quad u = \frac{c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}},$$

$$v = \frac{a(1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{bezw.} \quad v = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}},$$

wenn man

$$c = \frac{a^2}{b}$$

$$a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a}$$

setzt.

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Werte für v

$$v = b \sin \psi$$

zu. Führen wir denselben in die Gleichung der Ellipse für $P(u, v)$ ein:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

so erhalten wir

$$u = a \cos \psi.$$

Demnach ist einerseits

$$\frac{v}{u} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \psi,$$

und andererseits

$$\frac{v}{u} = (1 - \varepsilon^2) \operatorname{tg} \varphi$$

oder

$$\frac{v}{u} = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi ,$$

daraus folgt durch Gleichsetzen die gesuchte *Beziehung zwischen der geographischen und der reduzierten Breite* des beliebig gewählten Punktes $P(u, v)$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \psi , \qquad \operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi ,$$

oder

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{1 + \varepsilon_1^{\,2}} \operatorname{tg} \psi , \quad \operatorname{tg} \psi = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{tg} \varphi .$$

§ 5. Wir lenken unsere Aufmerksamkeit zuerst der Frage nach dem *größten Unterschiede* zwischen φ und ψ zu; gibt doch deren Beantwortung einen Einblick in das punktweise Entsprechen von Erdsphäroid und Kugel, in das von $P(u, v)$ und $R(b \cos \psi, b \sin \psi)$. Offenbar ist, wie auch die Figur 3 lehrt, $\varphi > \psi$; wir versuchen deshalb $(\varphi - \psi)$ zu ermitteln. Es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi \mp \operatorname{tg} \psi = \frac{(a \mp b)}{a} \operatorname{tg} \varphi ,$$

daher

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi} = \frac{a - b}{a + b} .$$

Ersetzt man die Tangenten durch den Quotient von sin und cos, so folgt

$$\frac{\sin (\varphi - \psi)}{\sin (\varphi + \psi)} = \frac{a - b}{a + b} ,$$

also

$$\sin (\varphi - \psi) = \frac{a - b}{a + b} \cdot \sin (\varphi + \psi) .$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$n = \frac{a - b}{a + b} .$$

Weil nun

$$\varphi + \psi = 2\varphi - (\varphi - \psi) ,$$
$$= 2\psi + (\varphi - \psi)$$

ist, so folgt

$$\sin (\varphi - \psi) = n \sin \{2\varphi - (\varphi - \psi)\} ,$$

oder

$$= n \sin \{2\psi + (\varphi - \psi)\} .$$

Demnach

$$\sin(\varphi - \psi) = n\{\sin 2\varphi \cos(\varphi - \psi) - \cos 2\varphi \sin(\varphi - \psi)\},$$

oder

$$= n\{\sin 2\psi \cos(\varphi - \psi) + \cos 2\psi \sin(\varphi - \psi)\}.$$

Löst man jede dieser Gleichungen nach $\sin(\varphi - \psi)$ auf, so erhält man

1a) $$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{n \sin 2\varphi}{1 + n \cos 2\varphi},$$

oder

1b) $$\operatorname{tg}(\varphi - \psi) = \frac{n \sin 2\psi}{1 - n \cos 2\psi}.$$

Wir stellen zuerst den numerischen Wert von n fest. Nach *Bessel* ist

$$\begin{aligned} a &= 6\,377\,397{,}155 \text{ m} \\ b &= 6\,356\,078{,}96 \text{ m} \\ \hline a - b &= 21\,318{,}195 \text{ m} \\ a + b &= 12\,733\,476{,}115 \text{ m} \\ \log(a - b) &= 14{,}328\,7504 - 10 \\ -\log(a + b) &= -\ 7{,}104\,9469 \\ \hline \log n &= 7{,}223\,8035 - 10 \\ n = \frac{a - b}{a + b} &= 0{,}001\,674\,185. \end{aligned}$$

Dabei bemerken wir, daß im folgenden alle Rechnungen mit einer *7-stelligen Vega-Bremiker*schen Logarithmentafel ausgeführt worden sind.

Wir knüpfen unsere weiteren Betrachtungen an die Gleichung an:

$$\sin(\varphi - \psi) = n \sin(\varphi + \psi).$$

Obschon $\varphi + \psi$ uns völlig unbekannt ist, so ist es doch auf keinen Fall größer als 180^0, welchen Wert es im Nordpol erreicht. Andererseits ist klar, daß der größte Wert von $\sin(\varphi + \psi)$ nur gleich Eins als dem Maximalbetrage des Sinus sein kann. Deshalb ist im allgemeinen

$$\begin{aligned} \sin(\varphi - \psi) &< n \\ \log \sin(\varphi - \psi) &< \log n \\ \log \sin(\varphi - \psi) &\leqq 7{,}2238035 - 10 \end{aligned}$$

daher

$$\varphi - \psi \leqq 0^0\ 5'\ 45{,}326''.$$

Eine kurze Entwicklung belehrt uns, in welcher Breite des Erdsphäroids diese *Maximaldifferenz* $\varphi - \psi = 0^0\ 5'\ 45{,}326''$ zu suchen ist. Die gefundene größte Differenz gehört zwei Winkeln φ_1 und ψ_1 an, für welche

$$\varphi_1 - \psi_1 = 0^0\ 5'\ 45{,}326'',$$

für die aber auch

$$\sin(\varphi_1 + \psi_1) = 1,$$

d. h.

$$\varphi_1 + \psi_1 = 90^0$$

ist. Daraus folgen die Werte

$$\varphi_1 = 45^0\ 2'\ 52{,}66'',$$
$$\psi_1 = 44^0\ 57'\ 7{,}34''.$$

Wir beachten, daß

$$\varphi_1 = 45^0 + \frac{(\varphi_1 - \psi_1)}{2},$$

$$\psi_1 = 45^0 - \frac{(\varphi_1 - \psi_1)}{2},$$

demnach

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \cot \psi_1$$

ist. Da nun

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_1$$

nach der Grundgleichung ist, so erhält man durch Multiplikation

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{b}{a} \cot \psi_1,$$

$$\operatorname{tg}^2 \psi_1 = \frac{b}{a},$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

und daher

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Die Gleichungen 1a) und 1b) geben zu folgenden Betrachtungen den Anlaß. Nimmt man an, die *geographische Breite* sei

$$\varphi = 45^0,$$

und setzt man dies in 1a) ein, so ist

$$\operatorname{tg}(45^0 - \psi) = n.$$

Da für kleine Winkel die Tangente und der Sinus ziemlich gleichwertig sind, so ist

$$45^0 - \psi = 0^0\ 5'\ 45{,}3'',$$

d. h.

$$\varphi = 45^0; \quad \psi = 44^0\ 54'\ 14{,}7''.$$

Wählt man aber für die *reduzierte Breite*

$$\psi = 45^0,$$

und setzt man dies in 1b) ein, so ist

$$\operatorname{tg}(\varphi - 45^0) = n.$$

Demnach

$$\varphi - 45^0 = 0^0\ 5'\ 45{,}3'',$$

$$\varphi = 45^0\ 5'\ 45{,}3''; \quad \psi = 45^0.$$

Also findet der größte Unterschied zwischen geographischer und reduzierter Breite in einer Zone statt, zu der als Mittelparallel der Parallelkreis

$$\varphi_1 = 45^0\ 2'\ 52{,}66''$$

gehört.

§ 6. Wir wollen an einigen Beispielen die Berechnung von ψ wirklich ausführen.

a) Sei $\varphi = 5^0$; es war

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\log \operatorname{tg}\psi = (\log b - \log a) + \log \operatorname{tg}\varphi.$$

$$b = 6\,356\,078{,}96 \text{ m}; \quad \log b = 7{,}803\,1893 - 1$$

$$a = 6\,377\,397{,}16 \text{ m}; \quad \log a = 6{,}804\,6435$$

$$\log b - \log a = 0{,}998\,5458 - 1$$

$$\log b - \log a = 0{,}998\,5458 - 1$$

$$\log \operatorname{tg} 5^0 = 8{,}941\,9518 - 10$$

$$\log \operatorname{tg}\psi = 8{,}940\,4976 - 10$$

$$\psi = 4^0\ 59'\ 0{,}13''; \quad \text{also} \quad \varphi - \psi = 0^0\ 0'\ 59{,}87''.$$

b) Sei $\varphi = 30^0$, so ist anzusetzen:

$$\log b - \log a = 0{,}998\,5458 - 1$$

$$\log \operatorname{tg} 30^0 = 9{,}761\,4394 - 10$$

$$\log \operatorname{tg}\psi = 9{,}759\,9852 - 10$$

$$\psi = 29^0\ 55'\ 1{,}2''; \quad \text{also} \quad \varphi - \psi = 0^0\ 4'\ 58{,}8''.$$

c) Die *Sternwarte zu Berlin* hat die Breite

$$\varphi = 52^0\ 30'\ 16{,}7'';$$

demnach ist zu bilden:

$$\log b - \log a = 0{,}998\,5458 - 1$$
$$\log \operatorname{tg} 52^0\ 30' \cdots = 0{,}115\,0923$$
$$\log \operatorname{tg} \psi = 0{,}113\,6381$$
$$\psi = 52^0\ 24'\ 43''; \quad \text{also} \quad \varphi - \psi = 0^0\ 5'\ 33{,}7''.$$

d) Wir wollen auch der im § 3 erklärten *geozentrischen Breite* einige Worte widmen.

Bezeichnen wir dieselbe mit β, so ist (Figur 3)

$$\sphericalangle POA = \beta.$$

Da P die Koordinaten u und v hatte, so folgt aus dem Dreieck OPE

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{u}.$$

Aber nach § 4 ist

$$v = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}},$$

$$u = \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}},$$

daher

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi.$$

Führt man die „reduzierte Breite“ ψ ein durch

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi,$$

so ist

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \psi.$$

Es wird also β *auf dieselbe Weise aus* ψ *berechnet, wie* ψ *aus* φ *folgte.*

Auch hier ist es leicht die Maximaldifferenz zwischen *geographischer* und *geozentrischer* Breite zu bestimmen. Da nach der Grundgleichung

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi$$

ist, so folgt

$$\operatorname{tg}\varphi \mp \operatorname{tg}\beta = \frac{(a^2 \mp b^2)}{a^2}\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\beta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2};$$

folglich

$$\frac{\sin(\varphi - \beta)}{\sin(\varphi + \beta)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

$$\sin(\varphi - \beta) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \cdot \sin(\varphi + \beta).$$

$\sin(\varphi - \beta)$ hat also *seinen größten Wert*, wenn $\sin(\varphi + \beta) = 1$ ist. Bezeichnen wir mit φ' und β' die Argumente, die dieser Gleichung entsprechen, so ist $\varphi' + \beta' = 90^0$. Daher ist

$$\sin(\varphi' - \beta') = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Nun war

$$\log\left(\frac{b}{a}\right) = 0{,}998\,5458 - 1,$$

demnach

$$\log\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0{,}997\,0916 - 1,$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0{,}993\,3255.$$

Also ist

$$\sin(\varphi' - \beta') = \frac{0{,}006\,6745}{1{,}993\,3255}.$$

$$\log 0{,}006\,6745 = 7{,}824\,4187 - 10$$
$$\log 1{,}993\,3255 = 0{,}299\,5785$$
$$\log \sin(\varphi' - \beta') = 7{,}524\,8405 - 10,$$

d. h.

$$\varphi' - \beta' = 0^0\,11'\,30{,}66''.$$

Die *größte Differenz* zwischen geographischer und geozentrischer Breite beträgt demnach ungefähr *das doppelte* von der von uns früher bestimmten Maximaldifferenz zwischen geographischer und reduzierter Breite. Da nun

$$\varphi' - \beta' = 0^0\,11'\,30{,}66''$$
$$\varphi' + \beta' = 90^0,$$

so folgt

$$\varphi' = 45^0\,5'\,45{,}33'',$$
$$\beta' = 44^0\,54'\,14{,}67''.$$

Daher wieder

$$\varphi' = 45^0 + \frac{(\varphi' - \beta')}{2},$$

$$\varphi' = 45^0 + \frac{\delta'}{2},$$

$$\beta' = 45^0 - \frac{\delta'}{2};$$

demnach

$$\operatorname{tg} \varphi' = \cot \beta'.$$

Da nun nach der Grundgleichung

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi'$$

ist, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{b^2}{a^2} \cot \beta',$$

$$\operatorname{tg}^2 \beta' = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{b}{a},$$

und daher

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{a}{b}.$$

e) Der Zusammenhang zwischen *geographischer, geozentrischer* und *reduzierter Breite* wird durch folgende Beziehungsgleichung vermittelt. Es war

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} \psi$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \psi$$

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg}^2 \psi}$$

$$\operatorname{tg} (\varphi + \beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \cdot \operatorname{tg} (2\psi)$$

$$= \frac{1}{2} (1{,}003\,354 + 0{,}996\,657) \operatorname{tg} (2\psi)$$

$$\operatorname{tg} (\varphi + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 2{,}000\,011 \cdot \operatorname{tg} (2\psi)$$

$$\operatorname{tg} (\varphi + \beta) = 1{,}000\,0055 \cdot \operatorname{tg} (2\psi).$$

Näherungsweise ist demnach

$$\varphi + \beta \sim 2\psi$$

oder

$$\varphi - \psi \sim \psi - \beta.$$

Diese Beziehung gestattet schnell eine Kontrolle über die Zahlenrechnung zu üben. Die korrekte Behandlung der Gleichung zwischen $(\varphi + \beta)$ und 2ψ geschieht nach einem von *Lagrange* gelehrten Verfahren, das wir erst im § 6 des II. Kapitels kennen lernen werden.

f) Wünscht man zu wissen, welches die Entfernung r eines Ortes der Erde vom Erdmittelpunkt ist, so ist (Fig. 3; $\triangle OPE$)

$$r = \frac{u}{\cos\beta}.$$

Es war aber

$$u = a\cos\psi,$$

daher

$$r = a \cdot \frac{\cos\psi}{\cos\beta}.$$

Dieser Wert von r bezieht sich natürlich auf die Meereshöhe, so daß die Erhebung des betrachteten Ortes über dem Meeresspiegel zu dem berechneten Werte von r noch hinzuzufügen ist.

g) Wir knüpfen hieran sofort die Berechnung der *geozentrischen Breite der Berliner Sternwarte* und die Bestimmung der Entfernung der Sternwarte vom Mittelpunkte der Erde.

Es ist nach d):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\psi,$$

also nach c):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{tg} 52^0\,24'\,43''.$$

$$\begin{aligned} \log b - \log a &= 0{,}998\,5458 - 1 \\ \log \operatorname{tg} 52^0\,24' \cdots &= 0{,}113\,6381 \\ \hline \log \operatorname{tg}\beta &= 0{,}112\,1839 \\ \beta &= 52^0\,19'\,9{,}01''. \end{aligned}$$

Dies ist die geozentrische Breite der Berliner Sternwarte. Also ist die Entfernung der Sternwarte vom Erdmittelpunkte unter Berücksichtigung, daß *Berlin* 34 m über dem Meeresspiegel liegt,

$$\begin{aligned} r_1 &= 34\text{ m} + \frac{a\cos\psi}{\cos\beta}, \\ r_1 &= \left(34 + 6\,377\,397{,}16 \cdot \frac{\cos 52^0\,24'\,43''}{\cos 52^0\,19'\,9{,}01''}\right)\text{ Meter}, \\ r_1 &= (34 + 6\,364\,020)\text{ m}, \\ r_1 &= 6\,364\,054\text{ m}. \end{aligned}$$

§ 7. Nehmen wir den Faden der Untersuchung wieder auf, so haben wir *zwei Meridiane von gleicher geographischer Länge*, die den beiden verschiedenen Körpern angehören, einander punktweise zugeordnet; wir haben sie *aufeinander abgebildet*. Da die Gesamtheit der Meridiane die Oberfläche des Sphäroids und die der Kugel bilden, so ist also auch die Abbildung des ersteren auf der letzteren geleistet. Wir wollen annehmen, diese Abbildung sei wirklich vollzogen; man habe also auch die Namen der Orte des Erdsphäroids an der durch unsere Formel festgelegten entsprechenden Stelle der Kugel vom Radius b eingeschrieben. Denken wir uns jetzt um den Mittelpunkt O des Sphäroids außerdem eine Kugel von 1 m Radius beschrieben, alsdann von O aus alle möglichen Halbmesser gezogen, bis sie die Kugel mit dem Radius b schneiden, und die Stichpunkte dieser Radien mit der Kugel von 1 m Radius auf der Oberfläche der letzteren vermerkt, so haben wir, wenn wir noch die Bezeichnungen aller Orte von der großen Kugel auf die kleine übertragen und letztere jetzt an die Oberfläche des Erdsphäroids bringen, uns in den Besitz eines Erdglobus von zwei Meter Durchmesser gesetzt.

Offenbar hat infolge unseres Übertragungsprinzips ein Ort auf der Oberfläche des Erdsphäroids von der Breite φ eine etwas kleinere Breite auf dem Globus. Er hat auf der nördlichen Halbkugel eine geringe Verschiebung nach *Süden* auf seinem Meridian erfahren. Die nachfolgende Tabelle stellt auf Grund der Formel

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

einem gegebenen Werte von φ den zugehörigen Wert von ψ gegenüber; eine ausführliche Tafel findet man in *Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde. Bd. III. 4. Aufl. Stuttgart 1896. Anhang S. [58].

φ	ψ	φ	ψ	φ	ψ
0°	0° 0′ 0″	35°	34° 54′ 35,7″	70°	69° 56′ 17,7″
5°	4° 59′ 0,1″	40°	39° 54′ 20,0″	75°	74° 57′ 7,1″
10°	9° 58′ 2,1″	45°	44° 54′ 14,7″	80°	79° 58′ 1,7″
15°	14° 57′ 7,6″	50°	49° 54′ 19,8″	85°	84° 59′
20°	19° 56′ 18,3″	55°	54° 54′ 35,3″	90°	90°
25°	24° 55′ 35,8″	60°	59° 55′ 0,7″		
30°	29° 55′ 1,2″	65°	64° 55′ 35,2″		

Wie man aus der Tafel ersieht, ist also die Abbildung der Oberfläche des Erdsphäroids auf einer Kugel ohne Verschiebung von Punkten, daher Dehnung oder Zusammenziehung von Strecken, Verzerrung von Flächenstücken nicht ausführbar. Für uns aber ist das Ziel erreicht, das wir uns gesteckt hatten, die *Gradeinteilung des Erdsphäroids.* Man berechne nämlich zu einem gegebenen Werte von φ, z. B. $\varphi = 55^0$, den zugehörigen Wert von ψ, also $\psi = 54^0\,54'\,35{,}3''$; trage an OA in O (Figur 3) den Winkel ψ an, dies ergibt die Richtung des Radius OR, und lege durch R zu OA die Parallele, welche die Meridianellipse im gesuchten Punkte P mit der Breite $\varphi = 55^0$ schneiden wird; damit ist aber zugleich der Parallelkreis für die Breite $\varphi = 55^0$ auf dem Rotationsellipsoid festgelegt.

Wir knüpfen hieran eine literarische Bemerkung. Bei der Definition des Begriffs der *„reduzierten Breite"* sind wir dem Manne gefolgt, der denselben als die *„korrigierte" Breite* zuerst in die sphäroidische Trigonometrie eingeführt und diese durch Beziehung auf ein sphärisches Dreieck zu vereinfachen gelehrt hat. Es ist *Dionis Du Séjour* in seiner Abhandlung: Nouvelles méthodes analytiques pour résoudre différentes questions astronomiques; mémoire, dans lequel on applique les „latitudes corrigées" à la solution de plusieurs problèmes géodésiques dans l'hypothèse de la Terre elliptique. (Histoire et Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris für das Jahr 1778, gedruckt 1781; Seite 73—192.)

Das Sphäroid wird von ihm auf die demselben *einbeschriebene* Kugel (Radius $= b$) so bezogen[1]), daß P und R *gleiche Ordinaten* haben. Im Gegensatz hierzu findet man oft, z. B. auch in *W. Jordan*, Handbuch der Vermessungskunde, Bd. III, 4. Aufl., Stuttgart 1896, S. 518, das Erd-Rotationsellipsoid auf die demselben *umschriebene* Kugel (Radius $= a$) so bezogen, daß Punkt P und der zugeordnete Punkt R' der Kugel *dieselbe Abszisse* haben (Figur 3). Wir wollen zeigen, daß die Punkte R und R' *auf demselben Radius* liegen, so daß sich also in der von uns

1) *Du Séjour* gibt in seiner Abhandlung vier Tafeln für φ und ψ für vier verschiedene Werte des Achsenverhältnisses $a : b$ der Erde, dessen Kenntnis zu seiner Zeit noch unsicher war.

festgestellten Beziehung zwischen den Winkeln φ und ψ *nichts ändert.*

Die Gleichung des um O mit a beschriebenen Kreises ist

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Legen wir durch $P(u, v)$ die Parallele PE zur y-Achse, so ist deren Gleichung

$$x = u.$$

Demnach schneidet diese Parallele PE den Kreis vom Radius a in Punkten mit den Ordinaten

$$y = \pm \sqrt{a^2 - u^2}.$$

Wir fassen den Punkt R' im ersten Quadranten mit

$$y' = + \sqrt{a^2 - u^2}$$

ins Auge, der also mit P dieselbe Abszisse u hat. Es war (§ 4)

$$u = a \cdot \cos \psi,$$

daher ist die Ordinate von R'

$$y' = \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \cos^2 \psi},$$
$$= a \sin \psi.$$

Verlängern wir aber OR bis zum Schnittpunkte mit dem Kreise vom Radius a (Figur 3), so ist die Ordinate dieses Schnittpunktes offenbar $a \cdot \sin \psi$, d. h. der letztere und unser Punkt R' sind *ein und derselbe Punkt.*

Es tritt also bei der neuen Festsetzung gegen früher die Veränderung ein, daß der Punkt $P(u, v)$, dessen Koordinaten die im § 4 abgeleiteten Werte behalten, dem Punkte

$$R'(a \cos \psi, a \sin \psi)$$

der Kugel zugeordnet wird.

§ 8. Von besonderem Interesse ist die zahlenmäßige Festlegung des Wertes, um den auf der Kugel vom Radius b ein Punkt mit der Breite ψ absteht von einem solchen mit der Breite φ, wenn φ und ψ durch die bekannte Gleichung miteinander verbunden sind. Wird doch durch $\varphi - \psi$ die Verzerrung der bewirkten Abbildung des Sphäroids auf der Kugel gemessen. Nun beträgt die Verschiebung bei $\psi = 4^0\,59'$ rund $1'$. Es hat aber ein Großkreisbogen von $1'$ auf unserer Kugel eine Länge von

$$\frac{\pi b}{10\,800} = \frac{\pi \cdot 6\,356\,078{,}96}{10\,800}\ \text{Meter}$$
$$= 1848{,}9085\ \text{m}.$$

Eine Verschiebung um 1″ hat also eine Länge von 30,8151 m. Daher ergibt sich folgende Übersicht:

φ	$\varphi - \psi$	Verschiebung in Metern
5°	1′	1 848,91
15°	2′ 52,4″	5 312,53
25°	4′ 24,2″	8 141,36
40°	5′ 40,0″	10 477,15
45°	5′ 45,3″	10 640,47
50°	5′ 40,2″	10 483,31
55°	5′ 24,7″	10 005,68
65°	4′ 24,8″	8 159,85
75°	2′ 52,9″	5 327,94
85°	1′	1 848,91

Es beträgt also bei der Kugel von 6 356 078,96 Meter Radius die *größte*, bei 45° Breite auftretende, Verschiebung 10 640,47 m. Bedenkt man, daß dieselbe auf der *Oberfläche* unserer Kugel in die Erscheinung tritt, ein auf derselben gedachter Meridianquadrant aber die Länge

$$\frac{\pi b}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 6\,356\,078{,}96\ \text{Meter}$$
$$= 9\,977\,211{,}63\ \text{m}$$

hat, so ersieht man, daß ein Punkt *mittlerer Breite* auf der von uns betrachteten *nördlichen Halbkugel* durch das Abbildungsverfahren *rund um 1 pro Mille* auf seinem Meridian *nach Süden* verschoben erscheint.

Es kommt also bei einem *Globus von 1 m Radius*, für den ein Meridianquadrant die Länge $\frac{\pi}{2}$ Meter $= 1{,}571$ m hat, als *höchster Betrag der Verschiebung* für die Gegend von 45° Breite

$$10\,640{,}47\ \text{m} : 6\,356\,078{,}96 = 0{,}00167\ \text{m} = 1{,}67\ \text{mm}$$

in Betracht. Dies ist die *absolute* Verschiebung nach Süden. Ein klares Bild erhält man erst, wenn man *die ganze Konfiguration eines Teiles* der Kugeloberfläche ins Auge faßt, also auch

die *relativen* Verschiebungswerte. Danach ist der 40. Parallel *absolut* um

$$10\,477{,}15 \text{ m} : 6\,356\,078{,}96 = 0{,}001\,648 \text{ m} = 1{,}65 \text{ mm}$$

und der 50. Parallel *absolut* um

$$10\,483{,}31 \text{ m} : 6\,356\,078{,}96 = 0{,}001\,649 \text{ m} = 1{,}65 \text{ mm}$$

nach dem Äquator zu verschoben. Die *relative Verschiebung* gegen den 45. Parallel beträgt demnach nur 0,02 mm; sie ist also ohne Belang.

Etwas anders ist das Ergebnis, wenn man unsere Kugel im Maßstabe 1 : 25 000 verkleinern wollte. Sie hätte dann einen Radius von

$$6\,356\,078{,}96 \text{ m} : 25\,000 = 254{,}2 \text{ m}.$$

Die absolute Verschiebung würde sich jetzt im Höchstbetrage zu

$$1{,}67 \text{ mm} \cdot 254{,}2 = 423 \text{ mm}$$

ergeben, die relative aber in der mittleren Breite zu

$$0{,}02 \text{ mm} \cdot 254{,}2 = 5{,}08 \text{ mm}.$$

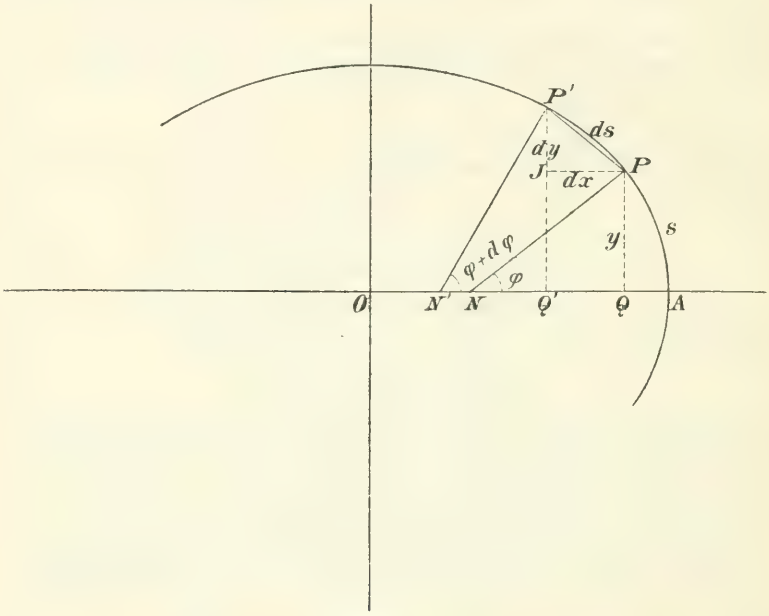
Es sind dies bei den riesigen Dimensionen des gedachten Globus nicht sehr ins Gewicht fallende Werte. Wollte man aber einzelne Gradmaschen desselben, oder Teile dieser, wirklich plastisch darstellen, so würde man diese Größen wahrscheinlich nicht unbeachtet lassen. (Vergl. *Fiorini-Günther*, Erd- und Himmelsgloben; ihre Geschichte und Konstruktion. Leipzig 1895, B. G. Teubner.)

§ 9. Die Franzosen haben, wie wir in § 2 berichteten, durch Gradmessungen auf einem Meridian zuerst versucht, die Abplattung des Erdsphäroids zu bestimmen. Auf welchen analytischen Grundlagen der Schluß von einer solchen Messung auf den Wert der Abplattung beruht, verdient wohl des näheren auseinandergesetzt zu werden.

Bezeichnet man den der Breite φ entsprechenden Bogen des Meridians des Erdsphäroids durch s, indem man denselben vom Äquator an zählt, so ist ein unendlich kleines Bogenelement $PP' = ds$, das vom Punkte P (Breite $= \varphi$) mit den Koordinaten x, y bis zum Punkte P' (Breite $= \varphi + d\varphi$) mit den Koordinaten $x - dx$, $y + dy$ reicht, wie die Figur 4 lehrt, gegeben durch

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

da $PJ = dx$, $P'J = dy$ ist, und die Ellipse offenbar als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich vielen, und deshalb unendlich kleinen, Seiten von der Größe ds angesehen werden kann, wie uns diese Anschauung ja aus der Lehre von der Kreismessung schon längst geläufig ist.



Figur 4.

Die Punkte P und P' liegen unendlich nahe beieinander auf Grund unserer Annahme; also gibt die Richtung $P'P$ die der Tangente in P an, da die Tangente jene Sekante ist, die durch zwei unendlich nahe Punkte der Kurve geht. Folglich steht $PN \perp P'P$, und es ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle P'PJ &= \sphericalangle P'PN - \sphericalangle JPN \\ &= \sphericalangle P'PN - \sphericalangle PNA \\ &= 90^0 - \varphi . \end{aligned}$$

Daher ist

$$\operatorname{tg} P'PJ = \frac{P'J}{PJ},$$

$$\operatorname{tg}(90^0 - \varphi) = \frac{dy}{dx},$$

$$\cot \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Demnach ist

$$ds = \sqrt{dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

$$ds = \pm \cdot dx\sqrt{1 + \cot^2 \varphi}$$

$$= \pm\, dx \cdot \frac{1}{\sin \varphi},$$

und zwar im besonderen

$$ds = -\frac{dx}{\sin \varphi},$$

denn die Abszissen x, die in der Richtung OA gezählt werden, nehmen ab mit wachsendem Bogen s, der vom Äquator an gerechnet wird. ds und dx müssen also offenbar entgegengesetzte Vorzeichen haben. Andererseits ist auch

$$ds = \sqrt{dy^2\left(1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)}$$

$$= +\, dy\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$= +\frac{dy}{\cos \varphi},$$

da s und y, wie die Figur 4 lehrt, zugleich zu- oder abnehmen. φ selbst wird als eine positive Größe betrachtet.

Nun war nach § 4 die Abszisse eines Punktes P der Meridianellipse gegeben durch

$$x\,(= u) = \frac{c \cdot \cos \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2 \cos^2 \varphi}},$$

aber auch durch

$$x\,(= u) = a \cdot \cos \psi.$$

Daraus folgt durch Gleichsetzen:

$$\cos \psi = \frac{c \cdot \cos \varphi}{a\sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Da

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{b} = \sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

ist, so ergibt sich

$$\cos \psi = \sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Ferner war nach § 4

$$y\,(= v) = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2 \cos^2 \varphi}},$$

aber auch

$$y\,(= v) = b \sin \psi,$$

woraus zu schließen ist

$$\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2\varphi}}.$$

Differenziert man die Gleichung

$$x = a\cos\psi,$$

so folgt

$$dx = -a\sin\psi d\psi,$$

$$= -\frac{a\sin\varphi\, d\psi}{\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2\varphi}};$$

also

$$-\frac{dx}{\sin\varphi} = \frac{a\cdot d\psi}{\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2\varphi}}.$$

Dies war aber ds, daher ergibt sich

$$ds = \frac{a\cdot d\psi}{\sqrt{1+\varepsilon_1^2\cos^2\varphi}}.$$

Hier ist jedoch $d\psi$ noch durch $d\varphi$ auszudrücken. Nun war

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\psi.$$

Durch Differentiation geht hervor

$$\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d\psi}{\cos^2\psi},$$

und hieraus wieder folgt:

$$d\psi = \frac{b}{a}\cdot\frac{\cos^2\psi}{\cos^2\varphi}\cdot d\varphi,$$

oder

$$d\psi = \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon_1^2\cos^2\varphi)},$$

$$d\psi = \frac{a}{b}\cdot\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon_1^2\cos^2\varphi)}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für ds ein, so ergibt sich

$$ds = \frac{c}{(1+\varepsilon_1^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\cdot d\varphi.$$

Führt man die Abkürzung ein

$$M = \frac{c}{(1+\varepsilon_1^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

der man auch wegen

$$1+\varepsilon_1^2\cos^2\varphi = \frac{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}{1-\varepsilon^2}$$

die Form geben kann

$$M = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

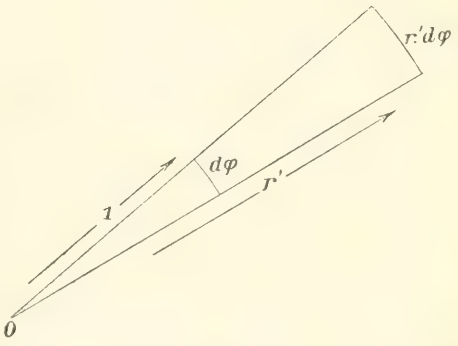
so ist

$$ds = M \cdot d\varphi .$$

Aus diesem Resultat können wir in erster Linie einen wichtigen Schluß ziehen. Bekanntlich wird in der höheren Mathematik die Anzahl der Grade eines Zentriwinkels bezogen auf die *Maßzahl des* diesem Zentriwinkel entsprechenden *Bogens* in dem Kreise, dessen Radius die *Längeneinheit* ist. Nur in diesem Sinne sind die von uns eingeführten Differentiale $d\varphi$ und $d\psi$ zu verstehen; sie sind die Differentiale von *Maßzahlen des Bogens*. Im Kreise mit dem Radius r' wird also dem Bogendifferential $d\varphi$ des Einheitskreises ein solches von der Größe (Figur 5)

$$ds' = r' \cdot d\varphi$$

entsprechen.



Figur 5.

Das Bogendifferential

$$ds = M \cdot d\varphi$$

der Meridianellipse kann also auf Grund der letzten Formel angesehen werden als *das Bogendifferential eines Kreises vom Radius M*. Deshalb nennt man *die Größe M den Krümmungsradius der Ellipse*, weil man *die Krümmung* einer Kurve durch den umgekehrten Wert $\left(\frac{1}{r'}\right)$ vom Radius desjenigen *Kreises* mißt, der sich am engsten an dieser Stelle an die betrachtete Kurve anschmiegt (nämlich durch drei unendlich nahe Punkte der Kurve geht!). Dies tut der Kreis mit dem Radius M in der Tat, da sein Bogendifferential $Md\varphi$ dem Bogendifferential ds der Meridianellipse gleich zu setzen ist.

Unter Annahme der *Bessel*schen Dimensionen des Erdsphäroids für

$$a = 6\,377\,397{,}155 \text{ m}; \quad \varepsilon^2 = 0{,}006\,674\,3722$$

ergeben sich für den Krümmungsradius

$$M = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

die folgenden Werte mit der Benennung „Meter“:

Breite φ	M	Breite φ	M
0^0	6 334 832	50^0	6 372 232
10^0	6 336 745	60^0	6 382 698
20^0	6 342 258	70^0	6 391 250
30^0	6 350 720	80^0	6 396 843
40^0	6 361 127	90^0	6 398 787
45^0	6 366 675		

§ 10. Ein Meridiangrad ist ein Grad eines elliptischen Meridians von solcher Länge, daß die durch seine beiden Endpunkte gezogenen Normalen zu der Ellipse einen Winkel von *einem Grad* miteinander einschließen. Sind also zwei Punkte P und P_1 auf dem Meridian gegeben, deren geographische Breiten φ und φ_1 sind, und bilden die Normalen in P und P_1 miteinander einen Winkel γ, so ist offenbar

$$\varphi_1 = \gamma + \varphi,$$

oder

$$\varphi_1 - \varphi = \gamma.$$

Soll also $\gamma = 1^0$ sein, so muß auch $\varphi_1 - \varphi = 1^0$ sein, d. h. ein Grad ist ein Bogen eines Meridians, der zwischen zwei Punkten liegt, deren geographische Breiten um einen Grad voneinander verschieden sind.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Aufgabe in Angriff nehmen, die wir uns im Eingang des vorigen Paragraphen gestellt haben.

Ist G die Maßzahl der Länge *eines* Grades unter der Breite φ, G' diejenige unter der Breite φ'; bedenkt man, daß einem Winkel von *einem* Grad auf einem Kreise, dessen Radius die Längeneinheit ist, ein Bogen entspricht, dessen Maßzahl $\frac{\pi}{180}$ ist, so besteht die Proportion:

$$G : \frac{\pi}{180} = ds : d\varphi,$$

indem sich elliptische Bögen von kleiner Größe zueinander wie die zugehörigen Kreisbögen verhalten.

Also ist

$$G = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{\pi}{180},$$

und entsprechend

$$G' = \frac{ds'}{d\varphi'} \cdot \frac{\pi}{180}.$$

Berücksichtigen wir den vorher für $\frac{ds}{d\varphi}$ abgeleiteten Wert, so ist

$$G = \frac{\pi b (1 + \varepsilon_1^2)}{180 (1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$G' = \frac{\pi b (1 + \varepsilon_1^2)}{180 (1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi')^{\frac{3}{2}}}.$$

Folglich ist

$$\frac{G}{G'} = \frac{(1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi')^{\frac{3}{2}}}{(1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man

$$\left(\frac{G}{G'}\right)^{\frac{1}{3}} = q,$$

so folgt

$$q^2 = \frac{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi'}{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}.$$

Demnach

$$\varepsilon_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{1 - q^2}{q^2 \cdot \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi'}.$$

Ist aber ε_1^2 bekannt, so ist

$$\frac{a^2}{b^2} = 1 + \varepsilon_1^2,$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{1 + \varepsilon_1^2},$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2}},$$

daher *die Abplattung* der Meridianellipse:

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2}}.$$

Wir wollen diese Formeln an dem oben in § 2 bereits erwähnten klassischen Beispiel der von den Franzosen ausgeführten Gradmessungen in Peru und in Lappland erläutern, bei denen sich $\frac{1}{310}$ für α ergeben hatte.

Da müssen wir denn freilich mit dem Bekenntnis beginnen, daß wir uns in der Darstellung der verwickelten Untersuchung einer Ungenauigkeit schuldig gemacht haben. Der aufmerksame Leser hat sich gewiß bereits die Frage vorgelegt, ob denn nicht das φ am *Anfange* eines Meridianbogens von $\gamma = 1^0$ Länge ein anderes ist als das am *Ende*. Dies ist natürlich der Fall. Wir wollen deshalb unter φ denjenigen Wert verstehen, der das *arithmetische Mittel* des soeben charakterisierten Anfangs- und des Endwertes der beiden zu G gehörigen Werte der geographischen Breite ist. Für ein genaueres Studium dieser sowohl den Geodäten als den Kartographen angehenden Verhältnisse verweisen wir auf das schon angeführte vorzügliche *Jordan*sche Handbuch der Vermessungskunde, Stuttgart 1896, Bd. III, 4. Aufl., § 35, Meridianbogenlängen. Dort wird sogar gezeigt, daß der Satz von dem arithmetischen Mittel der Breiten bis auf einen geringen Fehler noch anwendbar ist, wenn G und G' zwar kleine Bögen, aber jedenfalls größer als ein Meridiangrad sind.

Nach *Bessels* Angaben (Astron. Nachrichten, 14. Bd., S. 334 u. 337, 1837) sind folgende Zahlen dem zu behandelnden Beispiele zugrunde zu legen:

Gradmessung in Peru:

Meridianbogen $m = 176\,875{,}5$ Toisen $= 344\,736{,}772$ Meter

$\varphi_1 = -\ 3^0\ 4'\ 32{,}068''$ $\quad \varphi_2 = +\ 0^0\ 2'\ 31{,}387''$

$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = -\ 1^0\ 31'\ 0{,}3405''.$ $\quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 3^0\ 7'\ 3{,}455'' = 11223{,}455''.$

Gradmessung in Lappland:

Meridianbogen $m' = 92\,777{,}981$ Toisen $= 180\,827{,}654$ Meter

$\varphi_3 = 65^0\ 31'\ 30{,}265''$ $\quad \varphi_4 = 67^0\ 8'\ 49{,}830''$

$\varphi' = \frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} = 66^0\,20'\,10{,}0475''.$ $\quad \Delta\varphi' = \varphi_4 - \varphi_3 = 1^0\,37'\,19{,}565'' = 5839{,}565''.$

Da $1^0 = 3600''$ sind, so ist

$$G = \frac{m \cdot 3600}{11\,223{,}455}; \qquad G' = \frac{m' \cdot 3600}{5839{,}565}.$$

$$q^2 = \left(\frac{G}{G'}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{344\,736{,}772 \cdot \quad 5\,839{,}565}{11\,223{,}455 \cdot 180\,827{,}654}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\log\ 344\,736{,}772 = 5{,}537\,4876 \qquad \log\ 180\,827{,}654 = 5{,}257\,2649$$
$$\log\ 5\,839{,}565 = \underline{3{,}766\,3805} \qquad \log\ 11\,223{,}455 = \underline{4{,}050\,1266}$$
$$12{,}303\,8681 - 3 \qquad 9{,}307\,3915$$
$$\underline{-\ 9{,}307\,3915}$$
$$\log q^2 = (2{,}996\,4766 - 3)\tfrac{2}{3}$$
$$= (5{,}992\,9532 - 6)\tfrac{1}{3}$$
$$\log q^2 = 0{,}997\,6511 - 1\,.$$
$$q^2 = 0{,}994\,606\,.$$

$$\log q^2 = 0{,}997\,6511 - 1 \qquad \log\cos^2\varphi = \frac{(9{,}999\,8478 - 10)\cdot 2}{0{,}999\,6956 - 1}$$
$$\log\cos^2\varphi = \underline{0{,}999\,6956 - 1} \qquad \log\cos^2\varphi' = \frac{(9{,}603\,5433 - 10)\cdot 2}{0{,}207\,0866 - 1}$$
$$\log(q^2\cdot\cos^2\varphi) = 0{,}997\,3467 - 1 \qquad \cos^2\varphi' = 0{,}161\,096\,69$$
$$q^2\cdot\cos^2\varphi = 0{,}993\,909$$

$$\varepsilon_1^{\,2} = \frac{1 - 0{,}994\,606}{0{,}993\,909 - 0{,}161\,097} \qquad \log 0{,}005\,394 = 1{,}731\,9109 - 4$$
$$= \frac{0{,}005\,394}{0{,}832\,812} \qquad -\log 0{,}832\,812 = -0{,}920\,5469 \mp 1$$
$$= 0{,}006\,476\,85 \qquad \log\varepsilon_1^{\,2} = 0{,}811\,3640 - 3$$

$$1 + \varepsilon_1^{\,2} = 1{,}006\,476\,85$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_1^{\,2}}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}006\,476\,85}}$$
$$\frac{b}{a} = 0{,}996\,777$$
$$\alpha = 1 - 0{,}996\,777$$
$$\alpha = 0{,}003\,223$$
$$\alpha = \frac{3223}{1\,000\,000}$$
$$\alpha = \frac{1}{310{,}27}\,.$$

Bessel hat im 14 Bande von *Schumachers* Astronom. Nachrichten (1837) die Ergebnisse verschiedener Gradmessungen zusammengestellt, und er hat aus ihnen als wahrscheinlichsten Wert für die Abplattung

$$\alpha = \frac{1}{299{,}15}$$

abgeleitet; desgleichen fand er als solche Werte:

$$a = 6\,377\,397{,}155 \text{ m}, \qquad \log a = 6{,}804\,6435,$$

$$b = 6\,356\,078{,}96 \text{ m}, \qquad \log b = 6{,}803\,1893.$$

Wir setzen unsere Rechnung fort, um gleichfalls a und b aus den mitgeteilten Daten zu ermitteln. Es war einerseits

$$G' = \frac{\pi b(1+\varepsilon_1{}^2)}{180(1+\varepsilon_1{}^2\cos^2\varphi')^{\frac{3}{2}}}$$

und andererseits

$$G' = \frac{m' \cdot 3600}{5\,839{,}565} = \frac{180\,827{,}654 \cdot 3600}{5\,839{,}565},$$

daher ist

$$b = \frac{180\,827{,}654 \cdot 648\,000 \cdot (1 + 0{,}0064\,7685 \cdot 0{,}1610\,9669)^{\frac{3}{2}}}{\pi \cdot 5\,839{,}565 \cdot 1{,}0064\,7685} \text{ Meter},$$

$$b = 6\,356\,017{,}65 \text{ m} \quad (\log b = 6{,}803\,1851)$$

$$a = \frac{b}{0{,}996777} \text{ Meter},$$

$$a = 6\,376\,570 \text{ m} \quad (\log a = 6{,}804\,5871);$$

so daß sich also aus der *französischen* Gradmessung die Dimensionen des Erdsphäroids als zu klein ergeben.

Martus (Geheimer Regierungsrat u. Realgymnasialdirektor, geb. 1831 in Potsdam) gibt in seiner, viele auf *Berlin* bezügliche Daten enthaltenden, ausgezeichneten „*Astronomischen Geographie*“ (C. A. Koch, Leipzig 1880, große Ausgabe) eine elementare Berechnung der durch *W. Struve* ausgeführten *russischen* Gradmessung; sie ergab größere Werte, nämlich

$$a = 6\,378\,367 \text{ m}; \quad b = 6\,356\,764 \text{ m}.$$

§ 11. Wir können aus der Schlußformel des § 9 noch ein weiteres wichtiges Resultat ziehen. Es war

$$ds = M \cdot d\varphi,$$

wo ds ein Differential des Bogens s der Meridianellipse bedeutet. Da am Äquator die Breite φ gleich Null Grad ist, so wird eine *Integration* von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(= 90^0)$ uns die Länge eines *Meridianquadranten* finden lassen, aber eine solche von $\varphi = 0$ bis zu einem beliebigen Werte des φ (im Bogenmaß gemessen!)

uns die Meridianlänge vom Äquator bis zu dieser Breite anzeigen. Diesen Aufgaben wollen wir uns jetzt zuwenden.

Dazu transformieren wir zuerst unser ds von der geographischen Breite φ auf die reduzierte Breite ψ, weil der dadurch entstehende Ausdruck einfacher ist als der bis jetzt abgeleitete.

Nach § 9 (Seite 26) ist

$$d\varphi = \frac{(1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi)}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2}} \cdot d\psi .$$

Ferner war

$$M = \frac{c}{(1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

demnach

$$ds = b \sqrt{1 + \varepsilon_1^2} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}} .$$

Aber es war (Seite 25)

$$\cos \psi = \sqrt{1 + \varepsilon_1^2} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}},$$

daher

$$ds = b \cdot \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} d\psi .$$

Weiter ist

$$\cos^2 \psi = (1 + \varepsilon_1^2) \frac{\cos^2 \varphi}{(1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi)},$$

$$\frac{1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1 + \varepsilon_1^2}{\cos^2 \psi},$$

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} + \varepsilon_1^2 = \frac{1 + \varepsilon_1^2}{\cos^2 \psi},$$

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{1 + \varepsilon_1^2 \sin^2 \psi}{\cos^2 \psi},$$

$$\frac{\cos \psi}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \sin^2 \psi} .$$

Daher ist endlich

$$ds = b \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \sin^2 \psi} \cdot d\psi .$$

Folglich ist ein *Meridianbogen* gerechnet vom Äquator bis zu einem beliebigen Werte des φ bezw. ψ

$$s = \int_0^{\psi} b \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \sin^2 \psi} \cdot d\psi = b \cdot \int_0^{\psi} \sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \sin^2 \psi} \cdot d\psi .$$

Wir entwickeln $\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \sin^2 \psi}$ nach dem binomischen Lehrsatze. Es ist

$$\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \sin^2 \psi} = 1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon_1^2 \sin^2 \psi - \tfrac{1}{8} \varepsilon_1^4 \sin^4 \psi \ldots ,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder vernachlässigt werden können. Da jedoch

$$\sin^2\psi = \frac{1-\cos 2\psi}{2}, \quad \cos^2\psi = \frac{1+\cos 2\psi}{2},$$

und

$$\begin{aligned}\sin^4\psi &= \tfrac{1}{4}(1 - 2\cos 2\psi + \cos^2 2\psi)\\ &= \tfrac{1}{4}\{1 - 2\cos 2\psi + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\psi)\}\\ &= \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2\psi + \tfrac{1}{8}\cos 4\psi\end{aligned}$$

ist, so folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\varepsilon_1^2\sin^2\psi} &= 1 + \tfrac{\varepsilon_1^2}{4}(1-\cos 2\psi) - \tfrac{\varepsilon_1^4}{8}\left(\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\cos 2\psi + \tfrac{1}{8}\cos 4\psi\right)\\ &= \left(1 + \tfrac{\varepsilon_1^2}{4} - \tfrac{3}{64}\varepsilon_1^4\right) + \left(-\tfrac{\varepsilon_1^2}{4} + \tfrac{\varepsilon_1^4}{16}\right)\cos 2\psi - \tfrac{\varepsilon_1^4}{64}\cos 4\psi.\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}s = b\int_0^\psi \left(1 + \tfrac{\varepsilon_1^2}{4} - \tfrac{3}{64}\varepsilon_1^4\right).d\psi + b\int_0^\psi \left(-\tfrac{\varepsilon_1^2}{4} + \tfrac{\varepsilon_1^4}{16}\right)\cos 2\psi \cdot d\psi\\ - b\int_0^\psi \tfrac{\varepsilon_1^4}{64}\cos 4\psi \cdot d\psi.\end{aligned}$$

Nach den Elementen der Integralrechnung ist aber

$$\int_0^\psi d\psi = \psi;$$

$$\int_0^\psi \cos 2\psi \cdot d\psi = \tfrac{1}{2}\sin 2\psi;$$

$$\int_0^\psi \cos 4\psi \cdot d\psi = \tfrac{1}{4}\sin 4\psi.$$

Demnach ist

$$\text{I)}\quad s = \left(1 + \tfrac{\varepsilon_1^2}{4} - \tfrac{3}{64}\varepsilon_1^4\right)b\psi - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\varepsilon_1^2}{4} - \tfrac{\varepsilon_1^4}{16}\right)b\sin 2\psi - \tfrac{\varepsilon_1^4}{256}\cdot b\sin 4\psi.$$

Wir führen die Abkürzungen ein

$$\begin{aligned}\alpha' &= \left(1 + \tfrac{\varepsilon_1^2}{4} - \tfrac{3}{64}\varepsilon_1^4\right)\cdot b,\\ \beta' &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\varepsilon_1^2}{4} - \tfrac{\varepsilon_1^4}{16}\right)\cdot b,\\ \gamma' &= \tfrac{\varepsilon_1^4}{256}\cdot b\end{aligned}$$

und berechnen unter Zugrundelegung der *Bessel*schen Angaben für die Dimensionen des Erdsphäroids die Werte dieser Koeffizienten.

Nach *Bessel* ist

$$a = 6\,377\,397{,}15 \text{ m} \qquad \log a = 6{,}804\,6435.$$
$$b = 6\,356\,078{,}96 \text{ m} \qquad \log b = 6{,}803\,1893.$$
$$a + b = 12\,733\,476{,}11 \text{ m}$$
$$a - b = 21\,318{,}19 \text{ m}$$
$$\varepsilon_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}.$$
$$\log \varepsilon_1^2 = \log (a + b) + \log (a - b) - 2 \log b.$$
$$\log (a + b) = 7{,}104\,9469$$
$$\log (a - b) = 4{,}328\,7504$$
$$14{,}433\,6973 - 3$$
$$-2 \log b = -13{,}606\,3786$$
$$\log \varepsilon_1^2 = 0{,}827\,3187 - 3; \quad \varepsilon_1^2 = 0{,}006\,719\,218;$$
$$\log \varepsilon_1^4 = 0{,}654\,6374 - 5; \quad \varepsilon_1^4 = 0{,}000\,045\,148.$$
$$1 + \frac{\varepsilon_1^2}{4} - \frac{3}{64}\varepsilon_1^4 = 1{,}001\,677\,688.$$

Daher ist

$$\alpha' = \left(1 + \frac{\varepsilon_1^2}{4} - \frac{3}{64}\varepsilon_1^4\right) \cdot b$$
$$= 1{,}001\,677\,688 \cdot 6\,356\,078{,}96 \text{ m}$$
$$\log \alpha' = 6{,}803\,9173$$
$$\alpha' = 6\,366\,742{,}647 \text{ m}.$$
$$\beta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1^2}{4} - \frac{\varepsilon_1^4}{16}\right) \cdot b$$
$$= 0{,}000\,838\,491 \cdot 6\,356\,078{,}96 \text{ m}$$
$$\log \beta' = 3{,}726\,6877$$
$$\beta' = 5329{,}515 \text{ m}.$$
$$\gamma' = \frac{\varepsilon_1^4}{256} \cdot b$$
$$= 0{,}000\,000\,176\,35 \cdot 6\,356\,078{,}96 \text{ m}$$
$$\log \gamma' = 0{,}049\,5648$$
$$\gamma' = 1{,}120\,895 \text{ m}.$$

Wir erhalten also

I) $$s = \alpha' \cdot \psi - \beta' \sin 2\psi - \gamma' \sin 4\psi$$

mit den soeben berechneten Werten der Koeffizienten.

Beispiele. 1) Berechnung eines Meridianquadranten Q. Ist in der Formel I) im besonderen

$$\psi = \frac{\pi}{2},$$

so ist s die Länge eines Meridianquadranten Q, für den wir den Wert erhalten

$$Q = \alpha' \cdot \frac{\pi}{2} \cdot$$

$$\begin{aligned} \log \alpha' &= \quad 6{,}803\,9173 \\ \log \pi &= \quad 0{,}497\,1499 \\ &\quad\overline{7{,}301\,0672} \\ -\log 2 &= -0{,}301\,0300 \\ \log Q &= \quad \overline{7{,}000\,0372} \end{aligned}$$

$$Q = 10\,000\,857 \text{ m}.$$

Aus diesem Resultate fließt die Angabe der Lehrbücher der Erdkunde, daß *der Bogen eines Meridiangrades* (im Durchschnitt!)

$$\frac{Q}{90} = \frac{10\,000\,857}{90} \text{ m} = 111\,120{,}63 \text{ m} = 111{,}1206 \text{ km} \quad \text{ist.}$$

2) Welches ist die Länge des Meridianbogens B vom Äquator bis zur geographischen Breite von *Berlin:* $\varphi = 52^0\,30'\,16{,}7''$?

Nach § 6 ergibt sich aus $\varphi = 52^0\,30'\,16{,}7''$ die reduzierte Breite der *Sternwarte von Berlin:*

$$\psi = 52^0\,24'\,43''.$$

Suchen wir jetzt die *Maßzahl* des Bogens im Kreise mit einem Radius gleich der Längeneinheit (Einheitskreis), der einem Zentriwinkel von der Größe $\psi = 52^0\,24'\,43'' = 188683''$ entspricht, so ist diese Zahl

$$\begin{aligned} &= \frac{188683 \cdot \pi}{648000} \\ &= 188683 \cdot \varrho^{-1} \\ &= 0{,}914761. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$B = \{\alpha' \cdot 0{,}914761 - \beta' \cdot \sin 104^0\,49'\,26'' - \gamma' \cdot \sin 209^0\,38'\,52''\}$$

$$B = \{5\,824\,048{,}65 - 5152{,}13 + 0{,}55447\} \text{ Meter}$$

$$B = 5\,818\,897{,}074 \text{ Meter}.$$

3) In dieser Weise kann man *die Länge des Meridianbogens* s für jede beliebige geographische Breite φ berechnen.

Man hat dies in der Tat ausgeführt und wir geben nachstehend einige Werte, die auch in einer Tabelle in *Jordans* Handbuch, l. c. § 35, S. 216 enthalten sind, nach Korrektur eines sich dort bei $\varphi = 60^0$ findenden Druckfehlers.

Meridianbogen B vom Äquator bis zur Breite φ.

φ	B	φ	B	φ	B
30°	3 319 786,51 m	42°	4 651 168,47 m	52°	5 762 750,67 m
32°	3 541 502,52 m	44°	4 873 329,55 m	53°	5 874 014,72 m
34°	3 763 288,29 m	45°	4 984 439,27 m	54°	5 985 297,54 m
35°	3 874 208,05 m	46°	5 095 568,46 m	55°	6 096 598,93 m
36°	3 985 146,05 m	48°	5 317 885,23 m	56°	6 207 918,68 m
38°	4 207 077,71 m	50°	5 540 279,54 m	58°	6 430 612,27 m
40°	4 429 084,79 m	51°	5 651 505,57 m	60°	6 653 376,12 m

§ 12. Ohne Schwierigkeit kann man aus unserer Formel für s eine andere herleiten für die Länge eines begrenzten Bogens m zwischen den geographischen Breiten φ_1 und φ_2 bezw. den zugehörigen reduzierten Breiten ψ_1 und ψ_2, wo $\varphi_1 < \varphi_2$, also auch $\psi_1 < \psi_2$ sein möge. Offenbar ist

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha' \cdot \psi_1 - \beta' \cdot \sin 2\psi_1 - \gamma' \cdot \sin 4\psi_1 \\ s_2 &= \alpha' \cdot \psi_2 - \beta' \cdot \sin 2\psi_2 - \gamma' \cdot \sin 4\psi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m = s_2 - s_1 = \alpha' \cdot (\psi_2 - \psi_1) &- \beta' \cdot (\sin 2\psi_2 - \sin 2\psi_1) \\ &- \gamma' \cdot (\sin 4\psi_2 - \sin 4\psi_1). \end{aligned}$$

Es ist bekanntlich

$$\sin 2\psi_2 - \sin 2\psi_1 = 2 \sin (\psi_2 - \psi_1) \cdot \cos (\psi_2 + \psi_1)$$
$$\sin 4\psi_2 - \sin 4\psi_1 = 2 \sin 2(\psi_2 - \psi_1) \cdot \cos 2(\psi_2 + \psi_2).$$

Daher

Ia) $$\begin{aligned} m = \alpha'(\psi_2 - \psi_1) &- 2\beta' \cdot \sin (\psi_2 - \psi_1) \cdot \cos (\psi_2 + \psi_1) \\ &- 2\gamma' \cdot \sin 2(\psi_2 - \psi_1) \cdot \cos 2(\psi_2 + \psi_1). \end{aligned}$$

Diese Formel gestattet eine interessante Anwendung auf den Fall, wo

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 1^0$$

ist, wo es sich also um die Berechnung der Länge eines Meridianbogens von *einem* Grade in den verschiedenen Breiten handelt.

Wir wollen uns darauf beschränken, in sieben Fällen die Länge des betreffenden Meridianbogens wirklich herzuleiten; sie sollen dazu dienen, uns einen tieferen Einblick in den Charakter

der Abbildung, die durch den Begriff der „reduzierten Breite“ vermittelt wird, tun zu lassen.

Es sei	so ist	daher der zugehörige Meridianbogen des Erdsphäroids
$\varphi_1 = 0^0$	$\psi_1 = 0^0$	$m_1 = 6\,366\,742{,}647 \cdot 3588 \cdot \varrho^{-1}$ $- 2 \cdot 5329{,}515 \cdot \sin 59'48'' \cdot \cos 59'48''$ $- 2 \cdot 1{,}120895 \cdot \sin 1^0 59'36'' \cdot \cos 1^0 59'36''$
$\varphi_2 = 1^0$	$\psi_2 = 0^0 59'48''$	$m_1 = (110\,750{,}2296 - 185{,}3777 - 0{,}07793)$ m
$\varphi_2 - \varphi_1 = 1^0$	$\psi_2 - \psi_1 = 0^0 59'48''$	$m_1 = 110\,564{,}774$ m
$\varphi_1 = 30^0$	$\psi_1 = 29^0 55'1{,}2''$	$m_2 = 6\,366\,742{,}647 \cdot 3594{,}1 \cdot \varrho^{-1}$ $- 2 \cdot 5329{,}515 \cdot \sin 59'54{,}1'' \cdot \cos 60^0 49'56{,}5''$ $- 2 \cdot 1{,}120895 \cdot \sin 1^0 59'48{,}2'' \cdot \cos 121^0 39'53''$
$\varphi_2 = 31^0$	$\psi_2 = 30^0 54'55{,}3''$	$m_2 = (110\,938{,}52 - 90{,}51415 + 0{,}0409938)$ m
$\varphi_2 - \varphi_1 = 1^0$	$\psi_2 - \psi_1 = 0^0 59'54{,}1''$	$m_2 = 110\,848{,}047$ m
$\varphi_1 = 45^0$	$\psi_1 = 44^0 54'14{,}7''$	$m_3 = 6\,366\,742{,}647 \cdot 345{,}3 \cdot \varrho^{-1}$ $- 2 \cdot 5329{,}515 \cdot \sin 5'45{,}3'' \cdot \cos 89^0 54'14{,}7''$ $- 2 \cdot 1{,}120895 \cdot \sin 11'30{,}6'' \cdot \cos 179^0 48'29{,}4''$
$\varphi_2 = 45^0 5'45{,}3''$	$\psi_2 = 45^0$	$m_3 = (10\,658{,}321 - 0{,}0299 + 0{,}0075)$ m
$\varphi_2 - \varphi_1 = 0^0 5'45{,}3''$	$\psi_2 - \psi_1 = 0^0 5'45{,}3''$	$m_3 = 10\,658{,}2986$ m
$\varphi_1 = 45^0$	$\psi_1 = 44^0 54'14{,}7''$	$m_4 = 6\,366\,742{,}647 \cdot 3600{,}17 \cdot \varrho^{-1}$ $- 2 \cdot 5329{,}515 \cdot \sin 1^0 0'0{,}17'' \cdot \cos 90^0 48'29{,}57''$ $- 2 \cdot 1{,}120895 \cdot \sin 2^0 0'0{,}34'' \cdot \cos 181^0 36'59{,}14''$
$\varphi_2 = 46^0$	$\psi_2 = 45^0 54'14{,}87''$	$m_4 = (111\,125{,}88 + 2{,}6241 + 0{,}0782)$ m
$\varphi_2 - \varphi_1 = 1^0$	$\psi_2 - \psi_1 = 1^0 0'0{,}17''$	$m_4 = 111\,128{,}58$ m
$\varphi_1 = 52^0$	$\psi_1 = 51^0 54'24{,}8''$	$m_5 = 6\,366\,742{,}647 \cdot 3603{,}1 \cdot \varrho^{-1}$ $- 2 \cdot 5329{,}515 \cdot \sin 1^0 0'3{,}1'' \cdot \cos 104^0 48'52{,}7''$ $- 2 \cdot 1{,}120895 \cdot \sin 2^0 0'6{,}2'' \cdot \cos 209^0 37'45{,}4''$
$\varphi_2 = 53^0$	$\psi_2 = 52^0 54'27{,}9''$	$m_5 = (111\,216{,}317 + 47{,}606 + 0{,}068)$ m
$\varphi_2 - \varphi_1 = 1^0$	$\psi_2 - \psi_1 = 1^0 0'3{,}1''$	$m_5 = 111\,263{,}991$ m
$\varphi_1 = 60^0$	$\psi_1 = 59^0 55'0{,}7''$	$m_6 = 6\,366\,742{,}647 \cdot 3606{,}2 \cdot \varrho^{-1}$ $- 2 \cdot 5329{,}515 \cdot \sin 1^0 0'6{,}2'' \cdot \cos 120^0 50'7{,}6''$ $- 2 \cdot 1{,}120895 \cdot \sin 2^0 0'12{,}4'' \cdot \cos 241^0 40'15{,}2''$
$\varphi_2 = 61^0$	$\psi_2 = 60^0 55'6{,}9''$	$m_6 = (111\,312 + 95{,}512 + 0{,}037)$ m
$\varphi_2 - \varphi_1 = 1^0$	$\psi_2 - \psi_1 = 1^0 0'6{,}2''$	$m_6 = 111\,407{,}549$ m
$\varphi_1 = 89^0$	$\psi_1 = 88^0 59'47{,}9''$	$m_7 = 6\,366\,742{,}647 \cdot 3612{,}1 \cdot \varrho^{-1}$ $- 2 \cdot 5329{,}515 \cdot \sin 1^0 0'12{,}1'' \cdot \cos 178^0 59'47{,}9''$ $- 2 \cdot 1{,}120895 \cdot \sin 2^0 0'24{,}2'' \cdot \cos 357^0 59'35{,}8''$
$\varphi_2 = 90^0$	$\psi_2 = 90^0$	$m_7 = (111494{,}128 + 186{,}622 - 0{,}078)$ m
$\varphi_2 - \varphi_1 = 1^0$	$\psi_2 - \psi_1 = 1^0 0'12{,}1''$	$m_7 = 111\,680{,}672$ m

Berechnet man nach unserer Formel für m die Länge eines Meridianbogens für *einen* Grad in den verschiedenen Breiten, so erhält man:

φ	1° Breite in Kilometern	φ	1° Breite in Kilometern
0°—1°	110,5638	50°—51°	111,2260
1°—2°	110,5645	52°—53°	111,2640
2°—3°	110,5658	55°—56°	111,3197
3°—4°	110,5678	60°—61°	111,4075
4°—5°	110,5705	65°—66°	111,4866
10°—11°	110,6005	70°—71°	111,5546
15°—16°	110,6428	75°—76°	111,6094
20°—21°	110,6996	80°—81°	111,6492
25°—26°	110,7691	85°—86°	111,6729
30°—31°	110,8494	86°—87°	111,6757
35°—36°	110,9380	87°—88°	111,6777
40°—41°	111,0322	88°—89°	111,6791
45°—46°	111,1292	89°—90°	111,6798

Die von uns mit 7-stelligen Logarithmen berechneten Werte von m_1 bis m_7 weisen demnach eine *Unsicherheit* auf, die kleiner ist als *ein Meter* auf 100 000 Meter.

§ 13. Wenn wir uns die Frage vorlegen, worin die von uns soeben bemerkte Unsicherheit ihren Grund hat, so finden wir sehr bald die Ursache derselben in dem Umstande, daß wir die Entwickelung der Wurzelgröße

$$\sqrt{1 + \varepsilon_1^2 \sin^2 \psi}$$

nach dem binomischen Lehrsatze nicht weit genug getrieben haben. Es stellt also die Formel I) die ersten drei Glieder einer Reihe dar, die mit wachsenden Werten von φ bezw. ψ an Schnelligkeit der Konvergenz einbüßt. Der Unsicherheit könnte man abhelfen, indem man mehr Glieder als die von uns hingeschriebenen berechnet. Statt dessen haben sich die bedeutendsten Mathematiker, wie *Laplace* (Mécanique céleste I), *Gauß* (Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe u. s. w. Berlin, Springer, 1888, S. 12—14) u. a. bemüht, für die Bogengröße s Reihen von der höchsten Konvergenz aufzustellen. Wir ergänzen daher die Untersuchung des § 12 durch die Herleitung

einer neuen Formel für s, was namentlich um deswillen geschieht, weil I) erst dann anwendbar wird, wenn man aus dem gegebenen Werte von φ den zugehörigen Wert ψ der reduzierten Breite in bekannter Weise berechnet hat. Die neue Formel soll *s direkt als Funktion der geographischen Breite* geben.

Es war

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$ds = dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

$$ds = dy \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

$$ds = \frac{dy}{\cos \varphi}.$$

Nach § 4 ist

$$y(= v) = \frac{a(1 - \varepsilon^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

oder

$$y = a(1 - \varepsilon^2) \sin \varphi \, (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}};$$

daher

$$dy = a(1 - \varepsilon^2) \cos \varphi \, (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \cdot d\varphi$$

$$- \tfrac{1}{2} a(1 - \varepsilon^2) \sin \varphi \, (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi,$$

$$dy = \frac{a(1 - \varepsilon^2) \cos \varphi \, d\varphi}{(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi})^3}.$$

Also ist

$$ds = a(1 - \varepsilon^2) \frac{d\varphi}{(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi})^3}.$$

Folglich

$$s = \int_0^{\varphi} a(1 - \varepsilon^2) \frac{d\varphi}{(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi})^3},$$

oder

$$s = a(1 - \varepsilon^2) \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi})^3}.$$

Wir entwickeln zuerst die Wurzelgröße unter dem Integralzeichen. Es ist offenbar

$$1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi = 1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\left(\frac{e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}\,\frac{(e^{+2i\varphi} - 2 + e^{-2i\varphi})}{4}$$

$$= 1 - \frac{(a^2 - b^2)}{2a^2} + \frac{(a^2 - b^2)}{4a^2}\,(e^{+2i\varphi} + e^{-2i\varphi})$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{2a^2} + \frac{(a^2 - b^2)}{4a^2}\,(e^{+2i\varphi} + e^{-2i\varphi})$$

$$= \frac{(a+b)^2}{4a^2} + \frac{(a-b)^2}{4a^2} + \frac{(a^2 - b^2)}{4a^2}\,(e^{+2i\varphi} + e^{-2i\varphi})\ ^{1})$$

$$= \frac{(a+b)^2}{4a^2}\left\{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot(e^{+2i\varphi} + e^{-2i\varphi})\right\}$$

$$= \frac{(a+b)^2}{4a^2}\left(1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)e^{+2i\varphi}\right)\left(1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)e^{-2i\varphi}\right).$$

Demnach ist, wenn wie in § 5

$$n = \frac{a-b}{a+b} = 0{,}001\,674\,185,$$

also

$$\frac{2a}{a+b} = 1 + n$$

gesetzt wird,

$$(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} = (1+n)^3\{1 + ne^{+2i\varphi}\}^{-\frac{3}{2}} \cdot \{1 + ne^{-2i\varphi}\}^{-\frac{3}{2}}.$$

Es ist aber

$$\{1 + ne^{+2i\varphi}\}^{-\frac{3}{2}} = 1 - \tfrac{3}{2}\,ne^{+2i\varphi} + \tfrac{15}{8}\,n^2e^{+4i\varphi} - \tfrac{35}{16}\,n^3e^{+6i\varphi} \ldots$$

und

$$\{1 + ne^{-2i\varphi}\}^{-\frac{3}{2}} = 1 - \tfrac{3}{2}\,ne^{-2i\varphi} + \tfrac{15}{8}\,n^2e^{-4i\varphi} - \tfrac{35}{16}\,n^3e^{-6i\varphi} \ldots.$$

Daher ergibt sich

$$(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}} = (1+n)^3 \cdot \left\{(1+\tfrac{9}{4}n^2) - 3n(1+\tfrac{15}{8}n^2)\left(\frac{e^{+2i\varphi}+e^{-2i\varphi}}{2}\right) + \tfrac{15}{4}n^2\left(\frac{e^{+4i\varphi}+e^{-4i\varphi}}{2}\right)\right\},$$

wenn man die Glieder unterdrückt, die mit höheren Potenzen von n behaftet sind.

Demnach erhält man für s:

---

1) Hier setzen die Entwickelungen von *Gauß* l. c. ein. Vergl. auch *Grunert*, Sphäroidische Trigonometrie, Berlin 1833, S. 28—49 und *Schellbach*, Elliptische Integrale, Berlin 1864, S. 54—59.

$$s = \frac{b^2}{a} \cdot (1+n)^3 \int_0^{\varphi} (1 + \tfrac{9}{4} n^2)\, d\varphi$$

$$- \frac{b^2}{a} \cdot (1+n)^3 \int_0^{\varphi} 3n (1 + \tfrac{15}{8} n^2) \cos 2\varphi \cdot d\varphi$$

$$+ \frac{b^2}{a} \cdot (1+n)^3 \int_0^{\varphi} \tfrac{15}{4} n^2 \cos 4\varphi \cdot d\varphi$$

oder

II) $$s = \alpha'' \cdot \varphi - \beta'' \cdot \sin 2\varphi + \gamma'' \cdot \sin 4\varphi ,$$

wo die soeben eingeführten Abkürzungen die Werte haben:

$$\alpha'' = \frac{b^2}{a} \cdot (1+n)^3 (1 + \tfrac{9}{4} n^2)$$

$$\alpha'' = 6\,366\,703 \cdot 1{,}000\,006\,3065$$

$$\alpha'' = 6\,366\,743 \text{ m}$$

$$(\log \alpha'' = 6{,}8039173).$$

$$\beta'' = \frac{3}{2} \frac{b^2}{a} (1+n)^3 \cdot n (1 + \tfrac{15}{8} n^2)$$

$$\beta'' = \tfrac{3}{2} \cdot 6\,366\,703 \cdot 0{,}001\,6742 \cdot 1{,}000\,005\,255$$

$$\beta'' = 15\,988{,}65 \text{ m}$$

$$(\log \beta'' = 4{,}2038117).$$

$$\gamma'' = \frac{15}{16} \frac{b^2}{a} (1+n)^3 \cdot n^2$$

$$\gamma'' = 16{,}72988 \text{ m}$$

$$(\log \gamma'' = 1{,}223\,4928).$$

Beispiele. 1) Wir prüfen die Richtigkeit der Formel II), indem wir zuerst wieder einen Meridianquadranten berechnen. Ist

$$\varphi = \frac{\pi}{2} ,$$

so ist

$$Q = \alpha'' \cdot \frac{\pi}{2} ,$$

$$Q = 10\,000\,859 \text{ m}.$$

2) Die Länge eines Meridianbogens von *einem* Grade ist offenbar durch die Formel gegeben:

IIa) $$m = \alpha''(\varphi_2 - \varphi_1) - 2\beta'' \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \cos(\varphi_2 + \varphi_1) + 2\gamma'' \sin 2(\varphi_2 - \varphi_1) \cos 2(\varphi_2 + \varphi_1).$$

3) Sei

$$\varphi_2 = 31^0 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = 30^0,$$

so ist

$$m_2 = \alpha'' \cdot 3600 \cdot \varrho^{-1} - 2\beta'' \cdot \sin 1^0 \cdot \cos 61^0 + 2\gamma'' \cdot \sin 2^0 \cdot \cos 122^0,$$
$$= (111\,120{,}614 - 270{,}563 - 0{,}6188)\ \text{Meter},$$
$$= 110\,849{,}43\ \text{m}.$$

4) Sei

$$\varphi_2 = 90^0 \quad \text{und} \quad \varphi_1 = 89^0,$$

so ist

$$m_7 = \alpha'' \cdot 3600 \cdot \varrho^{-1} - 2\beta'' \cdot \sin 1^0 \cdot \cos 179^0 + 2\gamma'' \cdot \sin 2^0 \cdot \cos 358^0,$$
$$= (111\,120{,}614 + 558 + 1{,}167)\ \text{Meter},$$
$$= 111\,679{,}783\ \text{m}.$$

§ 14. Um noch tiefer in den Gegenstand einzudringen, wollen wir unseren Längen $m_1 \ldots m_7$ diejenigen Strecken $m_1' \ldots m_7'$ gegenüberstellen, die den Meridianbögen des Erdsphäroids auf der demselben, mit b als Radius, eingeschriebenen *Kugel* entsprechen. Es hat auf ihr ein Kreisbogen von 1″ die Länge

$$\frac{\pi \cdot b}{648\,000} = b \cdot \varrho^{-1}$$
$$= 30{,}8151\ \text{m}.$$

Man erhält also die folgende Tafel:

Meter	Meter	Demnach ist das Verhältnis $m_r' : m_r$
$m_1 = 110\,564{,}774$	$m_1' = 3588 \cdot b \cdot \varrho^{-1}$	
	$= 110\,564{,}733$	1
$m_2 = 110\,849{,}43$	$m_2' = 3594{,}1 \cdot b \cdot \varrho^{-1}$	
	$= 110\,752{,}73$	0,99913
$m_3 = 10\,658{,}299$	$m_3' = 345{,}3 \cdot b \cdot \varrho^{-1}$	
	$= 10\,640{,}471$	0,99833
$m_4 = 111\,129{,}2$	$m_4' = 3600{,}17 \cdot b \cdot \varrho^{-1}$	
	$= 110\,939{,}745$	0,99829
$m_5 = 111\,263{,}991$	$m_5' = 3603{,}1 \cdot b \cdot \varrho^{-1}$	
	$= 111\,030{,}05$	0,99790
$m_6 = 111\,407{,}549$	$m_6' = 3606{,}2 \cdot b \cdot \varrho^{-1}$	
	$= 111\,125{,}575$	0,99747
$m_7 = 111\,679{,}783$	$m_7' = 3612{,}1 \cdot b \cdot \varrho^{-1}$	
	$= 111\,307{,}385$	0,99666

Der Logarithmus von $m_\tau' : m_\tau$ ergibt sich als $0{,}9985495 - 1$, so daß also als Schlußwert dieses Verhältnisses $\frac{b}{a}$ anzusehen ist, dessen Logarithmus gleich $0{,}9985458 - 1$ ist.

Den Bruch $m_r' : m_r$ wollen wir das „*Längenverhältnis*“ oder das „*Vergrößerungsverhältnis*“ nennen. In scharfer Definition sagen wir: *Das Längenverhältnis ist der Quotient eines unendlich kleinen Bogens der Abbildung zu dem entsprechenden unendlich kleinen Bogen des Originals.* Es nimmt demnach bei der durch die *reduzierten Breiten* vermittelten Abbildung dieses Längenverhältnis *stetig* (kontinuierlich!) ab von 1 bis auf $\frac{b}{a} = 1 - \frac{1}{299{,}1528}$ für Meridianbogenlängen, die in der Richtung vom Äquator zum Pol auf dem Erdsphäroid einerseits und auf der Kugel vom Radius $b = 6\,356\,078{,}96$ Meter andererseits gemessen werden. In der Tat, es war (§ 4)

$$x = (u) = a \cos \psi,$$
$$y = (v) = b \sin \psi.$$

Daher ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$= (a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) d\psi^2.$$

Für die Kugel ist $d\sigma = b\,d\psi$. Folglich ist

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{b}{(a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi)^{\frac{1}{2}}},$$

was für $\psi = 0$ zu 1, für $\psi = \frac{\pi}{2}$ zu $\frac{b}{a}$ wird.

Würde man das Erdsphäroid statt auf einer Kugel mit dem Radius b auf einer solchen mit dem Halbmesser a abbilden, wie solches bereits im § 7 erwähnt worden ist, so müßten sämtliche Längen in der 2. Spalte der vorigen Tabelle mit $\frac{a}{b}$ multipliziert werden. Ein gleiches gilt von den Zahlen der 3. Spalte, die alsdann von $\frac{a}{b}$ bis auf 1 abnehmen würden. Wir fügen hieran sofort die Erklärung für die „*Längentreue*“, die dann eintritt, wenn bei einer Abbildung das oben erklärte *Längenverhältnis* stets *denselben Wert behält*, im besonderen den Wert 1.

§ 15. Unsere über die elliptischen Meridiane in ziemlicher Ausführlichkeit angestellten Untersuchungen erhalten ein Gegen-

stück in solchen über die Bögen der Parallelkreise. Wie die Figur 3 lehrt, liegt ein Punkt $P(x, y)$ des Ellipsoids auf einem Parallelkreise, dessen Radius gleich der Abszisse x dieses Punktes ist; demnach ist der Parallelkreishalbmesser nach § 4 (S. 10)

$$(u =)\ x = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

oder

$$(u =)\ x = \frac{b(1 + \varepsilon_1^{\,2}) \cos \varphi}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^{\,2} \cos^2 \varphi}}.$$

Da jedoch

$$b(1 + \varepsilon_1^{\,2}) = c = \frac{a^2}{b}$$

ist, so ist auch

$$x = \frac{a^2 \cdot \cos \varphi}{b\sqrt{1 + \varepsilon_1^{\,2} \cos^2 \varphi}}.$$

Aber durch die reduzierte Breite ψ ausgedrückt, ist

$$x = a \cdot \cos \psi.$$

Für die dem Sphäroid eingeschriebene Kugel, deren Radius b ist, hat der entsprechende Parallelkreis den Halbmesser

$$x' = b \cdot \cos \psi.$$

Daher ist das Längenverhältnis

$$\frac{x'}{x} = \frac{b}{a}$$

eine konstante Größe, d. h. die Parallelkreise werden *„längentreu"* abgebildet. Wir erinnern uns aber aus § 7, daß man das Erdsphäroid auch auf der demselben mit a als Radius umschriebenen Kugel abbilden kann, in welchem Falle der Punkt P des Rotationsellipsoids und der Punkt R' der Kugel, der mit ihm die *gleiche Abszisse* $a \cdot \cos \psi$ hat, zugeordnete Punkte sind. Alsdann ist also $x = x'$, und folglich sind die Parallelkreise nicht bloß längentreu, sondern sie sind sogar *längengleich* abgebildet. Es läßt sich nicht leugnen, daß infolgedessen die Kugel vom Radius a für die Abbildungsaufgabe im engeren Sinne gewisse Vorteile hat, die frühzeitig erkannt wurden, so von *Mollweide* und von *Gauß*, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden; freilich für das im § 8 berührte Globusproblem und für die erste Einführung in diese Untersuchungen gibt die Kugel vom Radius b der Darstellung eine größere Anschaulichkeit und erleichtert damit das Verständnis für dieselbe.

Wir gehen jetzt dazu über, einige Parallelkreisbögen zu berechnen, und geben alsdann eine Tabelle derselben.

Ist x der Radius eines Parallelkreises, so ist $2\pi x$ der Umfang desselben. Demnach hat auf demselben

1^0 des Parallelkreises die Länge von $x \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{-1}$,

$1'$ „ „ „ „ „ $x \cdot \left(\frac{10\,800}{\pi}\right)^{-1}$,

$1''$ „ „ „ „ „ $x \cdot \left(\frac{648\,000}{\pi}\right)^{-1}$.

Beispiele. 1) Sei $\varphi = 45^0$, so ist nach § 7

$$\psi = 44^0\,54'\,14{,}7''.$$

Daher ist denn

$$1^0 \text{ Länge} = a \cdot \cos\psi \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{-1},$$

$$1^0 \text{ Länge} = 6\,377\,397{,}15 \cdot \cos 44^0\,54'\,14{,}7'' \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{-1} \text{ Meter};$$

$$\log 6\,377\,397{,}15 = 6{,}8046435$$

$$\log\left(\frac{\pi}{180}\right) = 0{,}241\,8774 - 2$$

$$5{,}046\,5209$$

$$\log\cos 44^0\,54'\cdots = 9{,}850\,2108 - 10$$

$$4{,}896\,7317,$$

1^0 Länge unter 45^0 Breite = 78 837,29 Meter

$1'$ „ „ „ „ = 1 313,95 „

$1''$ „ „ „ „ = 21,90 „ .

2) Unter welcher geographischen Breite beträgt 1^0 der geographischen Länge 100 km?

Es ist anzusetzen

$$100\,000 = 6\,377\,397{,}15 \cdot \cos\psi \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^{-1},$$

folglich

$$\cos\psi = \frac{100\,000}{6\,377\,397{,}15} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)$$

$$\log\cos\psi = \log(10^5) - \left\{\log 6\,377\,397{,}15 + \log\left(\frac{\pi}{180}\right)\right\}$$

$$15{,}000\,0000 - 10$$

$$- \quad 5{,}046\,5209$$

$$\log\cos\psi = \quad 9{,}953\,4791 - 10.$$

Reduzierte Breite $\psi = 26^0\ 2'\ 56{,}12''$.

Es war (§ 6)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg}\varphi\,,$$

daher

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\psi \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

$$\log \operatorname{tg}\varphi = \log \operatorname{tg}\psi - \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\log \operatorname{tg}\psi = \quad 9{,}689\,1223 - 10$$

$$-\log\left(\frac{b}{a}\right) = -\,0{,}998\,5458 \mp 1$$

$$\log \operatorname{tg}\varphi = \quad 0{,}690\,5765 - 10.$$

Geographische Breite $\varphi = 26^0\ 7'\ 28{,}89''$.

Es ist dies etwa die Breite von Johannesburg in Südafrika.

3) Wie groß ist 1^0 geographischer Länge unter der *Breite von Berlin*?

Die geographische Breite der *Berliner Sternwarte* ist

$$\varphi = 52^0\ 30'\ 16{,}7'',$$

die reduzierte Breite derselben (§ 6)

$$\psi = 52^0\ 24'\ 43'',$$

daher weil

$$1^0 \text{ Länge} = a \cdot \cos\psi \left(\frac{180}{\pi}\right)^{-1},$$

$$\log a + \log\left(\frac{\pi}{180}\right) = 5{,}046\,5209 \text{ (nach Beispiel 1)}$$

$$\log\cos\psi = \underline{9{,}785\,3156 - 10}$$

$$4{,}831\,8365,$$

1^0 Länge unter der Breite von Berlin = 67 894,8 Meter

$1'$ „ „ „ „ „ „ = 1 131,58 „

$1''$ „ „ „ „ „ „ = 18,86 „ .

4) Wie groß ist 1^0 geographischer Länge unter der Breite des *Nordkaps von Europa* $\varphi = 71^0\ 15'$?

Für $\varphi = 71^0\ 15'$ ist

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg}\,71^0\ 15'$$

$$\log\left(\frac{b}{a}\right) = 0{,}998\,5458 - 1$$

$$\log \operatorname{tg}\,71^0\ 15' = \underline{0{,}469\,2187}$$

$$\log \operatorname{tg}\psi = 0{,}467\,7645\,.$$

Reduzierte Breite $\upsilon = 71^0\ 11'\ 29{,}49''$

$$1^0 \text{ Länge} = a \cdot \cos\psi \left(\frac{180}{\pi}\right)^{-1}$$

$$\log a + \log\left(\frac{\pi}{180}\right) = 5{,}046\,5209 \text{ (nach Beispiel 1))}$$

$$\log\cos\psi = 9{,}508\,4027 - 10$$

$$4{,}554\,9236$$

1^0 Länge unter der Breite des Nordkaps = 35 885,876 Meter
$1'$ „ „ „ „ „ „ = 598,10 „
$1''$ „ „ „ „ „ „ = 9,97 „ .

5) Für astronomische Ortsbestimmungen ist es häufig von Interesse, bei bekanntem Unterschied in der Ortszeit die Entfernung zweier Orte, die auf demselben Parallelkreise liegen, kennen zu lernen. Da nun 24 Stunden Zeit einer Drehung der Erde um 360^0 entsprechen, so ist klar, daß 1 Minute Zeit einem Bogen von $\frac{1}{4}^0$, 1 Sekunde Zeit einem solchen von $\frac{1}{4}$ Bogenminute entspricht. Man liest daher aus den Beispielen 1), 3) und 5) folgende Angaben ab:

Breite φ	1^m Zeit	1^s Zeit
45^0	19 709,3 m	328,5 m
$52^0\,30'$	16 976,2 m	282,9 m
$71^0\,15'$	8 971,5 m	149,5 m

6) Tabelle von Parallelkreisbögen:

φ	1^0 Länge in Kilometern	φ	1^0 Länge in Kilometern
0^0	111,3066	50^0	71,6870
10^0	109,6266	55^0	63,9863
20^0	104,6348	60^0	55,7931
30^0	96,4748	70^0	38,1818
40^0	85,3836	80^0	19,3910
45^0	78,8373	89^0	1,9491

§ 16. Die Frage nach der Größe der *Oberfläche des Erdsphäroids* soll uns nun beschäftigen. Denken wir uns auf dem Erdellipsoid zwei Parallelkreise gezogen, so schließen dieselben, wie bekannt, eine Zone ein. Wir nehmen die beiden Parallel-

kreise unendlich nahe beieinander an und erhalten dadurch ein Oberflächenelement in Gestalt eines Zonendifferentials dZ. Ein solches ist eine unendlich kleine Größe, die man unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung als den Mantel eines abgestumpften Kegels mit kreisförmiger Grundfläche ansehen kann. Der Inhalt eines solchen Mantels ist gegeben durch das Produkt aus π, aus der Seite des Mantels und aus der Summe der beiden Grundkreisradien. Für unser Zonendifferential dZ ist das Linienelement ds des Meridianbogens als die Seite des Mantels anzusehen; der Radius x des Parallelkreises ist der Halbmesser der unteren Grundfläche, derjenige der oberen, unendlich nahen, Deckfläche ist $x - dx$; deshalb ist

$$dZ = \pi \cdot ds(x + x - dx).$$

Unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Größen 2. und höherer Ordnung ist also

$$dZ = 2\pi x \cdot ds.$$

Es war nach § 4 (S. 10):

$$\begin{aligned}(u =)\ x &= \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}},\\ &= \frac{c\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1+\varepsilon_1{}^2\cos^2\varphi}},\\ &= a\cdot\cos\psi.\end{aligned}$$

Ferner ist nach § 9 bezw. § 11 (S. 27; 26; 33) das Bogenelement des elliptischen Meridians

$$\begin{aligned}ds &= \frac{a(1-\varepsilon^2)d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\\ &= \frac{c\cdot d\varphi}{(1+\varepsilon_1{}^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\\ &= b\cdot\sqrt{1+\varepsilon_1{}^2\sin^2\psi}\cdot d\psi.\end{aligned}$$

Daraus folgt für das Flächendifferential einer *Zone des Erdsphäroids:*

$$dZ = \frac{2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2},$$

oder

$$= \frac{2\pi c^2\cdot\cos\varphi\, d\varphi}{(1+\varepsilon_1{}^2\cos^2\varphi)^2},$$

oder durch Einführung der reduzierten Breite ψ

$$= 2\pi ab\cdot\cos\psi\cdot d\psi\cdot\sqrt{1+\varepsilon_1{}^2\sin^2\psi}.$$

Von diesen drei Ausdrücken wollen wir dem ersten und dem dritten unsere Aufmerksamkeit schenken und zwar zuerst dem zuletzt angegebenen, da in § 11 bereits alle Vorbereitungen zur Entwickelung des Flächeninhalts einer endlichen Zone, *gerechnet vom Aquator, wo* $\psi = 0$, *bis zu einem beliebigen Werte des* ψ, getroffen sind. Es ist nämlich eine solche Zone gegeben durch

$$Z = 2\pi a b \int_0^{\psi'} \cos\psi \sqrt{1 + \varepsilon_1^{\,2} \sin^2\psi}\, d\psi .$$

Ein solches Integral nennt man ein *elliptisches;* die Ermittelung seines Wertes geschieht im folgenden durch Reihentwickelung.

Es war (§ 11, S. 34)

$$b\sqrt{1 + \varepsilon_1^{\,2} \sin^2\psi} = \left(1 + \frac{\varepsilon_1^{\,2}}{4} - \frac{3}{64}\varepsilon_1^{\,4}\right) b + \left(-\frac{\varepsilon_1^{\,2}}{4} + \frac{\varepsilon_1^{\,4}}{16}\right) b \cos 2\psi - \frac{\varepsilon_1^{\,4}}{64} b \cos 4\psi ,$$

$$= \alpha' - 2\beta' \cos 2\psi - 4\gamma' \cos 4\psi .$$

Daher ist

$$Z = 2\pi a \int_0^{\psi'} (\alpha' \cos\psi - 2\beta' \cos\psi \cdot \cos 2\psi - 4\gamma' \cos\psi \cdot \cos 4\psi)\, d\psi .$$

Da aber

$$2 \cos 2\psi \cos\psi = \cos 3\psi + \cos\psi ,$$

$$2 \cos 4\psi \cos\psi = \cos 5\psi + \cos 3\psi$$

ist, so folgt

$$\alpha' \cos\psi - 2\beta' \cos\psi \cdot \cos 2\psi - 4\gamma' \cos\psi \cdot \cos 4\psi$$

$$= (\alpha' - \beta') \cos\psi - (\beta' + 2\gamma') \cos 3\psi - 2\gamma' \cos 5\psi .$$

Also ist

$$Z = 2\pi a(\alpha' - \beta') \int_0^{\psi} \cos\psi\, d\psi - 2\pi a(\beta' + 2\gamma') \int_0^{\psi} \cos 3\psi\, d\psi - 4\pi a \gamma' \int_0^{\psi'} \cos 5\psi\, d\psi .$$

Es ist aber

$$\int_0^{\psi'} \cos\psi\, d\psi = \sin\psi ,$$

$$\int_0^{\psi} \cos 3\psi\, d\psi = \tfrac{1}{3} \sin 3\psi ,$$

$$\int_0^{\psi'} \cos 5\psi\, d\psi = \tfrac{1}{5} \sin 5\psi .$$

Demnach

III) $Z = 2\pi a\{(\alpha' - \beta')\sin\psi - \frac{1}{3}(\beta' + 2\gamma')\sin 3\psi - \frac{2}{5}\gamma'\sin 5\psi\}$.

Ist im besonderen $\psi = \frac{\pi}{2}$, dehnt sich also die vom Äquator an gerechnete Zone bis zum Pol hin aus, so geht Z in die Hälfte der Oberfläche E des Erdsphäroids über, so daß sich also

$$E = 4\pi a\{(\alpha' - \beta') + \tfrac{1}{3}(\beta' + 2\gamma') - \tfrac{2}{5}\gamma'\}$$
$$= 4\pi a(\alpha' - \tfrac{2}{3}\beta' + \tfrac{4}{15}\gamma')$$
$$= 4\pi ab\left(1 + \frac{\varepsilon_1^{\,2}}{6} - \frac{\varepsilon_1^{\,4}}{40}\right),$$
$$E = 4\pi ab\,(1 + \tfrac{1}{6}\cdot 0{,}006\,719\,2188 - \tfrac{1}{40}\cdot 0{,}000\,045\,1479),$$
$$E = 4\pi ab\cdot 1{,}001\,118\,7411,$$
$$E = 509\,950\,723 \text{ Quadrat-Kilometer}$$

als Wert für *die ganze Oberfläche des Erdellipsoids* ergibt.

Denkt man sich eine Kugel vom Halbmesser R, welche die *gleiche* Oberfläche wie die Erde hat, so ist für dieselbe

$$4\pi R^2 = E,$$
$$R = \sqrt{\frac{E}{4\pi}},$$

aus welcher Relation die gewöhnlich als *der Erdradius* angegebene Größe

$$R = 6\,370\,289{,}45 \text{ m}$$

stammt.

Von Interesse ist auch hier die Frage nach dem Verhältnis, in dem auf der Kugel vom Radius b eine unendlich kleine Zone, die man durch *Abbildung vermittels der reduzierten Breiten* von einer unendlich kleinen Zone auf dem Erdsphäroid erhalten hat, zu dieser letzteren selbst als dem Original steht. Die Kugelzone hat den Inhalt

$$d\xi = 2\pi bh,$$

wo die Höhe h der Zone eine unendlich kleine Größe ist. Da aber, wie die Figur 6 lehrt, an die wir diese Voraussetzung knüpfen wollen,

$$h\sin = (90^0 - \psi)\cdot d\sigma,$$
$$h = \cos\psi\cdot bd\psi$$

ist, so folgt als Flächeninhalt des Bildes

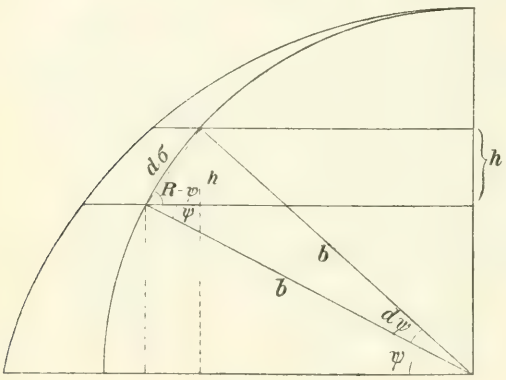
$$d\xi = 2\pi b^2\cos\psi\, d\psi.$$

Daher ist

$$\frac{d\xi}{dZ} = \frac{2\pi b^2 \cos\psi\, d\psi}{2\pi a b \cos\psi\, d\psi \sqrt{1+\varepsilon_1^2 \sin^2\psi}}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_1^2 \sin^2\psi}}.$$

Dieses Verhältnis hat demnach bei der genannten Abbildung *einen veränderlichen Wert.* Es variiert zwischen



Figur 6.

$\frac{b}{a}$ für $\psi = 0$ und

$$\frac{b}{a\sqrt{1+\varepsilon_1^2}} = \frac{b^2}{a^2}$$

für $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Im Anschluß hieran definieren wir den Begriff der *Flächentreue:* Ist das Verhältnis, in welchem Abbildung und Original in Beziehung auf ihren Flächeninhalt zueinander stehen, eine unveränderliche Zahl, so heißt die Abbildung *flächentreu.*

Hieraus ergibt sich, daß die Abbildung vermittels der reduzierten Breiten — $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\psi$ — *nicht* zu den flächentreuen gehört; man rechnet sie zu den *konventionellen.*

§ 17. An die Frage nach der ganzen Oberfläche des Erdsphäroids knüpft sich die andere, nach der Größe einer *„Grad-Abteilung"* oder *„Grad-Netz-Masche"* des Netzes von Meridianen und Parallelkreisen, mit denen wir uns die ganze Erdoberfläche überzogen denken. Eine solche Gradabteilung ist ein trapezartiges Viereck, das durch zwei Meridiane und durch zwei Parallelkreise begrenzt ist; beide haben einen Abstand von je 1°. Die Meßtischblätter der königlich preußischen Landes-Aufnahme im Maßstabe 1 : 25 000 sind das Abbild von Trapezen auf der Erdoberfläche, die jedoch nur eine geographische Breite von 6′ und eine geographische Länge von 10′ haben. 60 zusammenhängende

Meßtischblätter sind demnach das Abbild einer Gradnetzmasche. Bei der *Karte des Deutschen Reiches* im Maßstabe 1 : 100 000, zu der seit 1878 die von der königlich preußischen Landes-Aufnahme herausgegebene Generalstabskarte erweitert worden ist, gehören je 8 Blätter oder Sektionen zu einem Gradfelde. Jedes Blatt hat demnach 15 Breitenminuten Höhe (rund 28 km; vergl. die Tabelle im § 12) und 30 Längenminuten in der Breite (rund 34 km), so daß 15 Meßtischblättern zwei Sektionen der Karte im Maßstabe 1 : 100 000 entsprechen. Genauer heißt es, jedes Blatt der Generalstabskarte umfaßt den Flächenraum von sechs ganzen und drei geteilten Meßtischblättern, das sind rund 950 qkm. Da 1 mm der Karte 100 m auf der Erdoberfläche darstellen, so kann man in roher Annäherung 1 mm $= 3\frac{1}{4}''$ in geographischer Breite und $= 5\frac{1}{3}''$ in geographischer Länge setzen.

Die S. 54 stehende Figur 7 ist einem Übersichtsblatt der Meßtischblätter entnommen, die von der königlich preußischen Landesaufnahme veröffentlicht werden. Sie zeigt die Zusammenfassung der zuletzt genannten zu dem fett umrandeten Blatt einer Generalstabskarte (1 : 100 000), und sie zeigt, wie acht von diesen eine Masche des Gradnetzes ausfüllen. (Der Preis eines Meßtischblattes ist 1 Mark, der einer Sektion der Generalstabskarte 1,50 Mark. Die Simon Schroppsche Landkarten-Handlung, Berlin W., Jägerstraße 61 hält dieselben stets vorrätig und fügt auf Wunsch die sechs Übersichtsblätter aller Meßtischblätter des Deutschen Reiches unentgeltlich bei.)

Wir gehen jetzt dazu über, *einen zweiten Ausdruck für den Flächeninhalt einer Zone Z* zu entwickeln, von dem aus wir dann sehr leicht denjenigen einer Gradabteilung G herleiten werden. Es war

$$dZ = \frac{2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2}.$$

Da

$$a^2(1-\varepsilon^2) = b^2$$

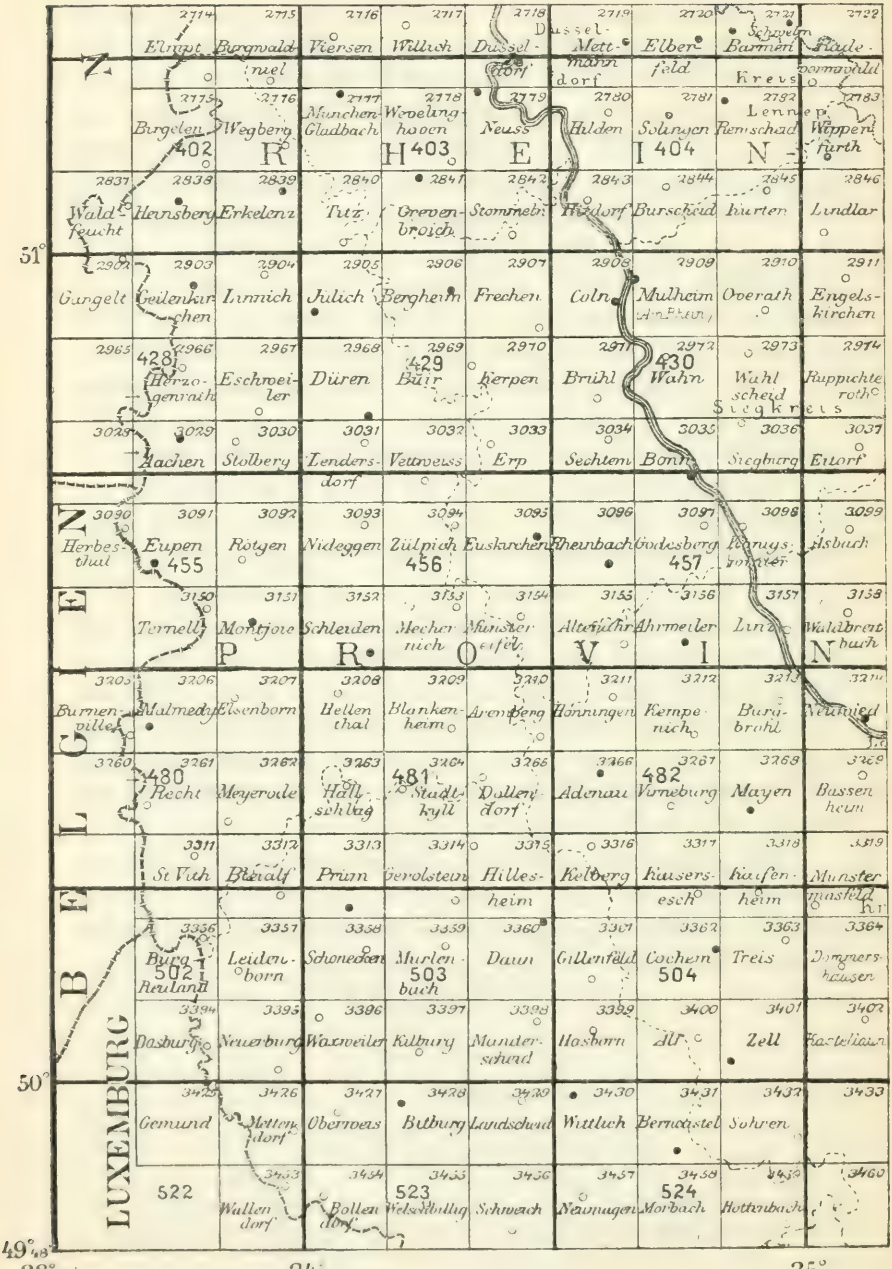
ist, so können wir auch schreiben

$$dZ = 2\pi ab\left(\frac{b}{a}\right)\frac{\cos\varphi\cdot d\varphi}{(1-\varepsilon^2\cdot\sin^2\varphi)^2}.$$

Es ist nach § 13, S. 41:

$$1-\varepsilon^2\cdot\sin^2\varphi = \left(\frac{a+b}{2a}\right)^2\cdot(1+ne^{+2i\varphi})\cdot(1+ne^{-2i\varphi}),$$

wo


Z
2714 Elmpt
2715 Burgwaldniel
2716 Viersen
2717 Willich
2718 Dusseldorf
2719 Dusseldorf-Mettmann
2720 Elberfeld
2721 Schwelm Barmen
2722 Hagen-vormwald
Kreis
2775 Birgelen 402
2776 Wegberg
2777 München-Gladbach
2778 Wevelinghoven 403
2779 Neuss
2780 Hilden
2781 Solingen 404
2782 Lennep Remscheid
2783 Wippenfurth
R H E I N
2837 Waldfeucht
2838 Heinsberg
2839 Erkelenz
2840 Titz
2841 Grevenbroich
2842 Stommeln
2843 Hitdorf
2844 Burscheid
2845 Kurten
2846 Lindlar
51°
2902 Gangelt
2903 Geilenkirchen
2904 Linnich
2905 Jülich
2906 Bergheim
2907 Frechen
2908 Coln
2909 Mulheim (Am Rhein)
2910 Overath
2911 Engelskirchen
2965 428 Herzogenrath
2966 Eschweiler
2968 Düren
2969 429 Buir
2970 Kerpen
2971 Brühl
2972 430 Wahn
2973 Wahlscheid
2974 Ruppichteroth
Siegkreis
3028 Aachen
3029 Stolberg
3030 Lendersdorf
3031 Vettweiss
3032 Erp
3033 Sechtem
3034 Bonn
3035 Siegburg
3036 Eitorf
3037
3090 Herbesthal
3091 Eupen 455
3092 Rötgen
3093 Nideggen
3094 Zülpich 456
3095 Euskirchen
3096 Rheinbach
3097 Godesberg 457
3098 Königswinter
3099 Asbach
3150 Ternell
3151 Montjoie
3152 Schleiden
3153 Mechernich
3154 Münstereifel
3155 Altenahr
3156 Ahrweiler
3157 Linz
3158 Waldbreitbach
P R O V I N
3205 Burnenville
3206 Malmedy
3207 Elsenborn
3208 Hellenthal
3209 Blankenheim
3210 Arenberg
3211 Hönningen
3212 Kempenich
3213 Burgbrohl
3214 Neuwied
3260 480 Recht
3261 Meyerode
3262 Hallschlag
3263 481 Stadtkyll
3264 Dallendorf
3265 Adenau
3266 482 Virneburg
3267 Mayen
3268 Bassenheim
3311 St Vith
3312 Bleialf
3313 Prüm
3314 Gerolstein
3315 Hillesheim
3316 Kelberg
3317 Kaisersesch
3318 Kaifenheim
3319 Münstermasfeld
3356 Burg 502 Reuland
3357 Leidenborn
3358 Schonecken
3359 Murlenbach 503
3360 Daun
3361 Gillenfeld
3362 Cochem 504
3363 Treis
3364 Dommershausen
3394 Dasburg
3395 Neuerburg
3396 Waxweiler
3397 Kilburg
3398 Manderscheid
3399 Hasborn
3400 Alf
3401 Zell
3402 Kastellaun
50°
3425 Gemund
3426 Mettendorf
3427 Oberweis
3428 Bitburg
3429 Landscheid
3430 Wittlich
3431 Bernkastel
3432 Sohren
3433
522
3453 Wallendorf
3454 Bollendorf
3455 523 Welschbillig
3456 Schweich
3457 Neumagen
3458 524 Morbach
3459 Hottenbach
3460
LUXEMBURG
49°48'
23°30'
24°
25°

Figur 7.

$$n = \frac{a-b}{a+b} = 0{,}001\,674\,185; \quad \log n = 0{,}223\,8035 - 3$$

war. Wir merken uns vorerst an:

$$1+n = \frac{2a}{a+b}; \quad 1-n = \frac{2b}{a+b}; \quad \frac{b}{a} = \frac{1-n}{1+n}.$$

Demnach ist

$$1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi = \frac{1}{(1+n)^2}(1+ne^{+2i\varphi})(1+ne^{-2i\varphi}),$$

$$(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{-2} = (1+n)^4 \cdot (1+ne^{+2i\varphi})^{-2} \cdot (1+ne^{-2i\varphi})^{-2}.$$

$$\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2} = (1-n^2)\cdot(1+n)^2\cdot(1+ne^{+2i\varphi})^{-2}\cdot(1+ne^{-2i\varphi})^{-2}.$$

$$= (1+2n-2n^3-n^4)\cdot(1+ne^{+2i\varphi})^{-2}\cdot(1+ne^{-2i\varphi})^{-2}.$$

Nun ist[1])

$$(1+ne^{+2i\varphi})^{-2} = 1 - 2ne^{+2i\varphi} + 3n^2e^{+4i\varphi} - 4n^3e^{+6i\varphi} + 5n^4e^{+8i\varphi}\cdots$$

$$(1+ne^{-2i\varphi})^{-2} = 1 - 2ne^{-2i\varphi} + 3n^2e^{-4i\varphi} - 4n^3e^{-6i\varphi} + 5n^4e^{-8i\varphi}\cdots,$$

folglich

$$(1+ne^{+2i\varphi})^{-2}\cdot(1+ne^{-2i\varphi})^{-2} = A - 2B\left(\frac{e^{+2i\varphi}+e^{-2i\varphi}}{2}\right)$$

$$+ 2C\left(\frac{e^{+4i\varphi}+e^{-4i\varphi}}{2}\right) - 2D\left(\frac{e^{+6i\varphi}+e^{-6i\varphi}}{2}\right) + 2E\left(\frac{e^{+8i\varphi}+e^{-8i\varphi}}{2}\right)\cdots$$

$$= A - 2B\cos 2\varphi + 2C\cos 4\varphi - 2D\cos 6\varphi + 2E\cos 8\varphi - \cdots,$$

wo

$$\begin{aligned}
A &= 1 \quad + 2\cdot 2n^2 + 3\cdot 3n^4 + 4\cdot 4n^6 \quad + 5\cdot 5n^8 \quad + \cdots\\
B &= 2n \quad + 2\cdot 3n^3 + 3\cdot 4n^5 + 4\cdot 5n^7 \quad + 5\cdot 6n^9 \quad + \cdots\\
C &= 3n^2 + 2\cdot 4n^4 + 3\cdot 5n^6 + 4\cdot 6n^8 \quad + 5\cdot 7n^{10} + \cdots\\
D &= 4n^3 + 2\cdot 5n^5 + 3\cdot 6n^7 + 4\cdot 7n^9 \quad + 5\cdot 8n^{11} + \cdots\\
E &= 5n^4 + 2\cdot 6n^6 + 3\cdot 7n^8 + 4\cdot 8n^{10} + 5\cdot 9n^{12} + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Daher ist

$$dZ = 2\pi ab(1+2n-2n^3-n^4)\left(\begin{array}{l} A\cos\varphi - 2B\cos\varphi\cos 2\varphi \\ +2C\cos\varphi\cos 4\varphi - 2D\cos\varphi\cos 6\varphi \\ +2E\cos\varphi\cos 8\varphi - \cdots \end{array}\right)d\varphi.$$

Bedenken wir, daß

$$\begin{aligned}
2\cos\varphi\cos 2\varphi &= \cos 3\varphi + \cos\varphi\\
2\cos\varphi\cos 4\varphi &= \cos 5\varphi + \cos 3\varphi\\
2\cos\varphi\cos 6\varphi &= \cos 7\varphi + \cos 5\varphi\\
2\cos\varphi\cos 8\varphi &= \cos 9\varphi + \cos 7\varphi\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

1) Einen allgemeinen Beweis mit Benutzung der *Gauß*schen hypergeometrischen Reihe gebe ich in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik, herausgegeben von *Mehmke* und *Runge*.

so ist

$$dZ = 2\pi ab(1+2n-2n^3-n^4)(A_1\cos\varphi - A_3\cos 3\varphi + A_5\cos 5\varphi - \cdots)d\varphi,$$

wo

$$A_1 = A - B; \quad A_3 = B - C; \quad A_5 = C - D; \quad A_7 = D - E; \cdots$$

gesetzt ist.

Wir bilden

$$A_1(1 + 2n - 2n^3 - n^4) =$$

$$(1-2n+4n^2-6n^3+ 9n^4-12n^5+16n^6-20n^7\cdots)(1+2n-2n^3-n^4)$$

$$\begin{array}{r}
1-2n+4n^2-6n^3+ 9n^4-12n^5+16n^6-20n^7\cdots \\
+2n-4n^2+8n^3-12n^4+18n^5-24n^6+32n^7\cdots \\
-2n^3+ 4n^4- 8n^5+12n^6-18n^7\cdots \\
- n^4+ 2n^5- 4n^6+ 6n^7\cdots
\end{array}$$

$$= 1.$$

$$A_3(1 + 2n - 2n^3 - n^4) =$$

$$(2n-3n^2+6n^3-8n^4+12n^5-15n^6+20n^7-24n^8\cdots)(1+2n-2n^3-n^4)$$

$$\begin{array}{r}
2n-3n^2+6n^3- 8n^4+12n^5-15n^6+20n^7-24n^8\cdots \\
+4n^2-6n^3+12n^4-16n^5+24n^6-30n^7+40n^8\cdots \\
- 4n^4+ 6n^5-12n^6+16n^7-24n^8\cdots \\
- 2n^5+ 3n^6- 6n^7+ 8n^8\cdots
\end{array}$$

$$= 2n + n^2$$

$$= n(n + 2).$$

$$A_5(1 + 2n - 2n^3 - n^4) =$$

$$n^2(3-4n+8n^2-10n^3+15n^4-18n^5+24n^6-28n^7\cdots)(1+2n-2n^3-n^4)$$

$$\begin{array}{r}
3-4n+8n^2-10n^3+15n^4-18n^5+24n^6-28n^7\cdots \\
+6n-8n^2+16n^3-20n^4+30n^5-36n^6+48n^7\cdots \\
- 6n^3+ 8n^4-16n^5+20n^6-30n^7\cdots \\
- 3n^4+ 4n^5- 8n^6+10n^7\cdots
\end{array}$$

$$= n^2(2n + 3).$$

$$A_7(1 + 2n - 2n^3 - n^4) =$$

$$n^3(4-5n+10n^2-12n^3+18n^4-21n^5+28n^6-32n^7\cdots)(1+2n-2n^3-n^4)$$

$$\begin{array}{r}
4-5n+10n^2-12n^3+18n^4-21n^5+28n^6-32n^7\cdots \\
+8n-10n^2+20n^3-24n^4+36n^5-42n^6+56n^7\cdots \\
- 8n^3+10n^4-20n^5+24n^6-36n^7\cdots \\
- 4n^4+ 5n^5-10n^6+12n^7\cdots
\end{array}$$

$$= n^3(3n + 4).$$

Die Kleinheit von n gestattet die weitere Berechnung dieser Koeffizienten hier abzubrechen; auch im allgemeinsten Falle erhält man stets ein zweigliedriges Resultat. Daher ist jetzt

$$dZ = 2\pi ab\Big(\cos\varphi - n(n+2)\cos 3\varphi + n^2(2n+3)\cos 5\varphi - n^3(3n+4)\cos 7\varphi \cdots\Big)\, d\varphi.$$

Integriert man vom Äquator ($\varphi = 0$) bis zu einer beliebigen Breite $\bar{\varphi}$ und bedenkt, daß

$$\int_0^{\bar{\varphi}} \cos(m\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{m}\sin(m\bar{\varphi})$$

ist, so ergibt sich als *der Inhalt der Zone:*

IV) $$Z = 2\pi ab\Big(\sin\bar{\varphi} - \tfrac{1}{3}n(n+2)\sin 3\bar{\varphi} + \tfrac{1}{5}n^2(2n+3)\sin 5\bar{\varphi} - \tfrac{1}{7}n^3(3n+4)\sin 7\bar{\varphi}\cdots\Big).$$

Diese höchst einfache und *für die numerische Rechnung beste Formel* rührt von *Grunert* her (Sphäroidische Trigonometrie, Berlin 1833, S. 46), der dieselbe durch recht komplizierte Entwickelungen fand. Sie ist bisher, wie es scheint, der Aufmerksamkeit der Geodäten völlig entgangen. Hr. *Rödel* (Schlömilchs Zeitschrift 38. Jahrgang, 1893, S. 56—60) hätte sie beinahe wieder gefunden, wenn er seine Rechnungen noch einen Schritt weiter geführt hätte. Das Merkwürdige ist, daß *Jordan* (l. c. S. 223) seinen eigenen, auf sehr umständliche Weise gefundenen und mit viel Zeitverlust zu berechnenden *Reihen* für die Koeffizienten von $\sin(m\bar{\varphi})$ den Vorzug gibt vor den *geschlossenen* und schnell zu bestimmenden Werten, die Hr. *Rödel* abgeleitet hat.

Aus Formel IV) kann man mit leichter Mühe die Flächeninhalte der heißen, der gemäßigten und der kalten Zone ausrechnen. Wir benutzen sie, um zur Kontrolle den Wert für *die Oberfläche des ganzen Erdsphäroids* aufzustellen, indem wir $\bar{\varphi} = \frac{\pi}{2}$ setzen und dann mit 2 multiplizieren, da ja die Integration nur über die halbe Oberfläche des ganzen Körpers erstreckt worden ist. Man erhält

$$E = 4\pi ab\{1 + \tfrac{1}{3}n(n+2) + \tfrac{1}{5}n^2(2n+3) + \tfrac{1}{7}n^3(3n+4)\}.$$
$$= 4\pi \cdot 6\,377\,397{,}155 \cdot 6\,356\,078{,}96 \cdot 1{,}001\,118\,7436 \text{ qm}$$
$$= 509\,950\,730 \text{ qkm}.$$

Nach *Jordan* (l. c. 3. Bd. S. 225) ergibt sich 509 950 714,2 qkm.

Diejenige Kugel, die mit dem Erdsphäroid *gleiche* Oberfläche hat, besitzt einen Radius R, der sich aus der Gleichung bestimmt:

$$R^2 = a \cdot b \cdot 1{,}001\,118\,7436$$
$$R = 6\,370\,289 \text{ m}.$$

Berechnen wir aus der Formel IV) den Inhalt einer Zone zwischen den Breiten φ_1 und φ_2 $(\varphi_2 > \varphi_1)$, so ist

$$\begin{aligned} Z = 2\pi ab(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1) &- \tfrac{1}{3}n(n+2)\cdot 2\pi ab(\sin 3\varphi_2 - \sin 3\varphi_1) \\ &+ \tfrac{1}{5}n^2(2n+3)\cdot 2\pi ab(\sin 5\varphi_2 - \sin 5\varphi_1) \\ &- \tfrac{1}{7}n^3(3n+4)\cdot 2\pi ab(\sin 7\varphi_2 - \sin 7\varphi_1). \end{aligned}$$

Führt man die Abkürzungen ein

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \Delta\varphi \quad \text{und} \quad \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \varphi \text{ (die Mittelbreite)},$$

so ist

$$\text{V)} \quad Z = 4\pi ab \left\{ \begin{aligned} &\sin\Delta\varphi\cdot\cos\varphi - \tfrac{1}{3}n(n+2)\sin 3\Delta\varphi\cdot\cos 3\varphi \\ &+ \tfrac{1}{5}n^2(2n+3)\sin 5\Delta\varphi\cdot\cos 5\varphi \\ &- \tfrac{1}{7}n^3(3n+4)\sin 7\Delta\varphi\cdot\cos 7\varphi \end{aligned} \right\}.$$

Dabei ist

$a_1 = \frac{1}{3}n(n+2) = 0{,}001\,117\,0573$, mit dem Logarithmus $0{,}048\,0755 - 3$

$a_2 = \frac{1}{5}n^2(2n+3) = 0{,}000\,001\,6836$, mit dem Logarithmus $0{,}226\,2426 - 6$

$a_3 = \frac{1}{7}n^3(3n+4) = 0{,}000\,000\,0027$, mit dem Logarithmus $0{,}428\,9172 - 9$.

Jetzt kann man bequem aus der Formel V) den *Flächeninhalt G einer Gradabteilung* bestimmen. Man bedenke, daß derselbe $\frac{1}{360}$ eines Zonengürtels von 1^0 Breite ist; man muß also

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 1^0, \quad \text{folglich } \Delta\varphi = 30'$$

setzen.

Daher ist für φ als die *Mittelbreite* der Gradnetzmasche:

$$\text{VI)} \quad G = \frac{\pi\cdot ab}{90} \left\{ \begin{aligned} &\sin 30'\cdot\cos\varphi - a_1 \sin 1^0\,30'\cdot\cos 3\varphi \\ &+ a_2 \sin 2^0\,30'\cdot\cos 5\varphi - a_3 \sin 3^0\,30'\cdot\cos 7\varphi \end{aligned} \right\}.$$

Als Beispiel für die Berechnung der Größe einer Gradabteilung nach Formel VI) wählen wir diejenige, in der *Berlin* liegt; wir haben für diese

$$\varphi_2 = 53^0, \quad \varphi_1 = 52^0, \quad \text{also} \quad \varphi = \frac{53^0 + 52^0}{2} = 52^0\,30'$$

als Wert für die Mittelbreite einzusetzen.

Man erhält

$$G = \left\{\begin{array}{r} 12\,347{,}5852 \cos 52^0\,30' + 41{,}3747 \cos 22^0\,30' \\ - 0{,}103\,911 \cos 82^0\,30' \end{array}\right\} \text{qkm}$$

$$= \{7516{,}733 + 38{,}225 - 0{,}013\,56\}\,\text{qkm}$$

$$= 7554{,}945 \text{ qkm}.$$

Wir geben im Anschluß hieran eine Tabelle des Flächeninhalts solcher Gradabteilungen für verschiedene Breiten.

φ	1-Gradabteilung in Q.-Kilometern	φ	1-Gradabteilung in Q.-Kilometern
0^0—1^0	12 305,86	52^0—53^0	7 554,95
10^0—11^0	12 105,61	53^0—54^0	7 383,62
20^0—21^0	11 545,87	54^0—55^0	7 209,96
30^0—31^0	10 640,03	55^0—56^0	7 033,99
40^0—41^0	9 410,70	60^0—61^0	6 121,66
49^0—50^0	8 054,35	70^0—71^0	4 157,09
50^0—51^0	7 890,36	80^0—81^0	2 057.76
51^0—52^0	7 723,87	89^0—90^0	108,84

§ 18. Wir dehnen unsere Untersuchung endlich noch auf die beiden Fragen aus nach der *Größe des Teiles der Oberfläche des Erdsphäroids*, der in einer Sektion der Generalstabskarte des Deutschen Reiches (Maßstab 1 : 100 000), und ferner desjenigen, der in einem Meßtischblatt der königlich preußischen Landesaufnahme (Maßstab 1 : 25 000) dargestellt wird.

1) *Inhaltsformel für eine Sektion der Generalstabskarte.*

Es ist

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 15', \quad \text{also} \quad \Delta\varphi = 7'\,30''.$$

Da das Blatt, wie im Eingang des § 17 angegeben ist, eine Breite von 30 Längenminuten hat, so erfüllen 720 aufeinanderfolgende Sektionen einen um die ganze Erde sich legenden Zonengürtel. Demnach leiten wir aus der Formel V (§ 17) die folgende neue her:

$$\text{VII)} \quad Gst = \frac{\pi a b}{180}\left\{\begin{array}{r} \sin 7'\,30'' \cdot \cos\varphi - a_1 \sin 22'\,30'' \cdot \cos 3\varphi \\ + a_2 \sin 37'\,30'' \cdot \cos 5\varphi \end{array}\right\}.$$

Berechnet man wieder die einzelnen Koeffizienten, so ergibt sich

$$Gst = \{1543{,}4662 \cos\varphi - 5{,}1724 \cos 3\varphi + 0{,}012\,99 \cos 5\varphi\}\,\text{qkm},$$

und zwar sind die Logarithmen dieser Koeffizienten

$$3{,}188\,4971; \quad 0{,}713\,6911; \quad 0{,}113\,7015 - 2.$$

Als Beispiele wählen wir

1) die Sektion *Tondern* (Nr. 22).

Es ist

$$\varphi_2 = 55^0, \quad \varphi_1 = 54^0\,45'; \quad \text{also} \quad \varphi = 54^0\,52'\,30''.$$

Man erhält

$$Gst = \left\{\begin{array}{l} 1543{,}4662 \cdot \cos 54^0 52' 30'' + 5{,}1724 \cdot \cos 15^0 22' 30'' \\ \qquad\qquad + 0{,}012\,99 \cdot \cos 85^0 37' 30'' \end{array}\right\}\text{qkm},$$

$$= \{888{,}052 + 4{,}987 + 0{,}001\}\,\text{qkm},$$

$$= 893{,}04\ \text{qkm}.$$

2) die Sektion *Posen* (Nr. 301).

Hier ist

$$\varphi_2 = 52^0\,30'; \quad \varphi_1 = 52^0\,15'; \quad \text{also} \quad \varphi = 52^0\,22'\,30''.$$

Man erhält

$$Gst = \left\{\begin{array}{l} 1543{,}4662 \cdot \cos 52^0 22' 30'' + 5{,}1724 \cdot \cos 22^0 52' 30'' \\ \qquad\qquad - 0{,}012\,99 \cdot \cos 81^0 52' 30'' \end{array}\right\}\text{qkm},$$

$$= \{942{,}2717 + 4{,}7565 - 1{,}0042\}\,\text{qkm},$$

$$= 946{,}033\ \text{qkm}.$$

3) die Sektion *Oberstdorf* (Nr. 670).

Es ist

$$\varphi_2 = 47^0\,30'; \quad \varphi_1 = 47^0\,15'; \quad \text{also} \quad \varphi = 47^0\,22'\,30''.$$

Man erhält

$$Gst = \left\{\begin{array}{l} 1543{,}4662 \,.\, \cos 47^0 22' 30'' + 5{,}1724 \cdot \cos 37^0 52' 30'' \\ \qquad\qquad - 0{,}012\,99 \cdot \cos 56^0 52' 30'' \end{array}\right\}\text{qkm},$$

$$= \{1045{,}23 + 4{,}08 - 0{,}007\}\,\text{qkm},$$

$$= 1049{,}306\ \text{qkm}.$$

2) *Inhaltsformel für* den durch *ein Meßtischblatt* dargestellten Teil der Oberfläche des Erdellipsoids.

Es ist

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 6', \quad \text{also} \quad \Delta\varphi = 3'.$$

Das Meßtischblatt hat eine Breite von 10 Längenminuten; es erfüllen also 2160 von Ost nach West aufeinanderfolgende Blätter einen um die ganze Erde sich legenden Zonengürtel. Wir erhalten deshalb aus der Formel V (§ 17) die folgende neue Formel:

$$\text{VIII)}\quad M = \frac{\pi a b}{540}\{\sin 3' \cdot \cos\varphi - a_1 \sin 9' \cdot \cos 3\varphi + a_2 \sin 15' \cdot \cos 5\varphi\}.$$

Werden die Koeffizienten wieder für Quadratkilometer berechnet, so ergibt sich

$$M = \{205{,}7956 \cos\varphi - 0{,}689\,656 \cos 3\varphi + 0{,}001\,732 \cos 5\varphi\}\,\text{qkm},$$

und zwar sind die Logarithmen dieser Koeffizienten

$$2{,}313\,4361;\quad 0{,}838\,6324 - 1;\quad 0{,}238\,6474 - 3.$$

Um auch ein Beispiel für die Anwendung dieser Formel zu geben, wählen wir die Sektion *Teltow* (Nr. 1907 bezw. Nr. 21), *(Grunewald bei Berlin)*.

Es ist

$$\varphi_2 = 52^0\,30';\quad \varphi_1 = 52^0\,24';\quad \text{also}\quad \varphi = 52^0\,27'.$$

Man erhält

$$M = \left\{\begin{array}{r} 205{,}7956 \cdot \cos 52^0\,27' + 0{,}689\,656 \cdot \cos 22^0\,39' \\ - 0{,}001\,732 \cdot \cos 82^0\,15' \end{array}\right\}\text{qkm},$$

$$M = \{125{,}4229 + 0{,}6364 - 0{,}0002\}\,\text{qkm},$$

$$M = 126{,}0595\ \text{qkm}.$$

Wir berechnen die sphäroidischen Ränder des genannten Trapezes. Der Meridianbogen hat 6′, daher sind der *östliche* und der *westliche* Rand nach der Formel IIa) des § 13, S. 42:

$$m = \alpha'' \cdot 360 \cdot \varrho^{-1} - 2\beta'' \cdot \sin 6' \cdot \cos 104^0\,54' + 2\gamma'' \cdot \sin 12' \cdot \cos 209^0\,48',$$

$$= \alpha''.\, 360 \cdot \varrho^{-1} + 2\beta'' \cdot \sin 6' \cdot \cos\ 75^0\,6' - 2\gamma'' \cdot \sin 12' \cdot \cos\ 29^0\,48',$$

$$= (11\,112{,}0614 + 14{,}3508 - 0{,}10135)\ \text{Meter},$$

$$= 11\,126{,}3108\ \text{m}.$$

Der *südliche* Rand reicht von der geographischen Länge

$$\lambda_2 = 31^0 \quad \text{bis} \quad \lambda_1 = 30^0\,50'$$

und liegt auf einem Parallelkreise, dessen geographische Breite

$$\varphi_1 = 52^0\,24'$$

ist; deshalb ist nach § 15, S. 45:

$$r_{süd} = \frac{a \cdot \cos 52^0\,24'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 52^0\,24'}} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{6},$$
$$= 11\,342{,}65 \text{ m}.$$

Der *nördliche* Rand reicht von der geographischen Länge

$$\lambda_2 = 31^0 \quad \text{bis} \quad \lambda_1 = 30^0\,50'$$

und liegt auf einem Parallelkreise, dessen geographische Breite

$$\varphi_2 = 52^0\,30'$$

ist; deshalb ist dieser Kreisbogen

$$r_{nord} = \frac{a \cdot \cos 52^0\,30'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 52^0\,30}} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{6},$$
$$= 11\,317 \text{ m}.$$

Da das Meßtischblatt alles im Maßstabe 1 : 25 000 gibt, so ist

	auf dem Sphäroid	aber auf der Karte	Differenz
Ost-Rand:	(25 000) · 44,5 cm	43,9 cm	0,6 cm
West- „ :	(25 000) · 44,5 cm	43,8 cm	0,7 cm
Süd- „ :	(25 000) : 45,3 cm	45,3 cm	0,0 cm
Nord- „ :	(25 000) : 45,27 cm	45,2 cm	0,07 cm

Die Differenzen rühren zum Teil von dem Eingang des Papiers in die Presse, zum Teil von der *Verzerrung* her, die *durch die Projektion* hervorgebracht wird. Welcher Art diese Projektion ist, wird im nächsten Kapitel behandelt werden.

Wir geben in der nachstehenden Tabelle die Flächeninhalte einiger durch die Meßtischblätter dargestellten sphäroidischen Trapeze oder Netzmaschen.

φ	Trapezfläche in Q.-Kilometern	φ	Trapezfläche in Q.-Kilometern
45° 0′—6′	145,8802	52° 0′—6′	127,1894
48° 0′—6′	138,1288	52° 30′—36′	125,7756
49° 0′—6′	135,4571	53° 0′—6′	124,3518
50° 0′—6′	132,7428	53° 30′—36′	122,9183
50° 30′—36′	131,3699	54° 0′—6′	121,4748
51° 0′—6′	129,9866	54° 30′—36′	120,0218
51° 30′—36′	128,5931	54° 54′—60′	118,8524

Zweites Kapitel.

Die flächentreue und die winkeltreue Abbildung des Erdsphäroids auf einer Kugel. Die konforme Doppelprojektion der königlich preußischen Landesaufnahme. Die Generalstabskarte und das Meßtischblatt.

§ 1. Wenn das Verhältnis, in dem Abbildung und Original in Beziehung auf ihren Flächeninhalt zueinander stehen, eine unveränderliche Zahl ist, so nannten wir die Abbildung eine *flächentreue* (I, § 16). Die Abbildung des Erdsphäroids vermittels der reduzierten Breiten gehört, wie wir sahen, *nicht* zu den flächentreuen. Es sei daher unsere Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Punktes des Erdsphäroids einerseits und dem zugehörigen Bildpunkte auf der Kugel andererseits zu ermitteln, wenn es sich um eine flächentreue Abbildung handelt. Sei E der Flächeninhalt des Erdellipsoids, F der Inhalt der Oberfläche einer Kugel, so würde nach der Erklärung

$$dF : dE = \lambda ,$$

folglich auch nach Integration

$$F = \lambda \cdot E$$

sein. Wir wählen nun unter allen möglichen Kugeln diejenige aus, für die

$$F = E$$

ist, zumal wir ja in jedem Augenblick das auf der Kugel erhaltene Bild *sich selbst ähnlich* durch Zentralprojektion vom Kugelmittelpunkte aus auf einer größeren oder auf einer kleineren Kugel abbilden, also über den Faktor λ nachträglich beliebig verfügen können. Die Untersuchung stützt sich auf I, § 16—17; sie wurde begonnen von *Mollweide* (geb. 1774 in

Wolfenbüttel, gest. 1825 als Professor in Leipzig). In seinem Aufsatz: *„Einige Projektionsarten der sphäroidischen Erde.* Kapitel II: Projektionen, welche die Länder ihrem Flächeninhalte auf dem Sphäroid gemäß vorstellen" (*v. Zach,* Monatliche Korrespondenz, Gotha, Sept. 1807, S. 204—210) gibt er die Grundgedanken der nun folgenden Entwickelungen.

Stellen wir uns die Differentiale dF und dE unserer Flächen als Zonen vor, so geht nach I, § 16 die Gleichung

$$dF = dE$$

in die andere über

$$d\xi = dZ,$$

d. h.

$$2\pi R^2 \cos\omega\, d\omega = \frac{2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2},$$

zwar so, daß auf beiden Flächen die Längenunterschiede die gleichen sind, den Breiten φ des Ellipsoids die Breiten ω der Kugel entsprechen, deren Radius R nach I, § 17, S. 57 gegeben ist durch

$$R^2 = ab\{1 + \tfrac{1}{3}n(n+2) + \tfrac{1}{5}n^2(2n+3) + \tfrac{1}{7}n^3(3n+4)\}.$$

Integrieren wir daher die obige Differentialgleichung in den Grenzen 0 bis ω einerseits und 0 bis φ andererseits, da

$$\omega = 0,\quad \varphi = 0;\quad \omega = \frac{\pi}{2},\quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

einander entsprechende Wertepaare sind, so ist (I, § 17, Formel IV)

$$2\pi R^2 \sin\omega = 2\pi ab\Big(\sin\varphi - \tfrac{1}{3}n(n+2)\sin 3\varphi + \tfrac{1}{5}n^2(2n+3)\sin 5\varphi - \tfrac{1}{7}n^3(3n+4)\sin 7\varphi\Big).$$

Es bestimmen sich also die Breiten ω auf der Kugel durch

$$\sin\omega = \frac{\sin\varphi - a_1\sin 3\varphi + a_2\sin 5\varphi - a_3\sin 7\varphi}{1 + a_1 + a_2 + a_3},$$

Den Wert des Nenners haben wir in I, § 17 bereits angegeben; er war

$$1{,}001\,118\,7436,$$

ebenso sind uns a_1, a_2, a_3 bekannt. Demnach ergibt sich für $\sin\omega$ die Formel:

I) $\sin\omega = A_2\sin\varphi - B_2\sin 3\varphi + C_2\sin 5\varphi - D_2\sin 7\varphi,$

wo die folgenden Glieder so klein sind, daß sie unterdrückt werden können. Es ist

$$A_2 = 0{,}998\,8825 \qquad (\log A_2 = 0{,}999\,5144 - 1),$$
$$B_2 = 0{,}001\,115\,809 \qquad (\log B_2 = 0{,}047\,5899 - 3),$$
$$C_2 = 0{,}000\,001\,682 \qquad (\log C_2 = 0{,}225\,7570 - 6),$$
$$D_2 = 0{,}000\,000\,002 \qquad (\log D_2 = 0{,}428\,4316 - 9).$$

Als Probe für die Genauigkeit der Zahlenrechnung dient die Annahme $\varphi = \frac{\pi}{2}$, der bekanntlich $\omega = \frac{\pi}{2}$ entsprechen muß. Dann ist $\sin \omega = 1$; also müßte

$$1 = A_2 + B_2 + C_2 + D_2$$

sein, während in Wirklichkeit sich ergibt: 0,999 999 993. Setzt man in die obige Formel für $\sin \omega$ ein

$$\sin 3\varphi = \sin \varphi (3 - 4 \sin^2 \varphi)$$
$$= \sin \varphi (1 + 2 \cos 2\varphi),$$

ferner

$$\sin 5\varphi = \sin \varphi (16 \sin^4 \varphi - 20 \sin^2 \varphi + 5)$$
$$= \sin \varphi (2 \cos 4\varphi + 2 \cos 2\varphi + 1),$$

so erhält man, wenn man D_2 vernachlässigt,

$$\sin \omega = \sin \varphi \{(A_2 - B_2 + C_2) - 2(B_2 - C_2) \cos 2\varphi + 2 C_2 \cos 4\varphi\},$$

wo

$$A_2 - B_2 + C_2 = 0{,}997\,768\,37 \qquad (0{,}999\,0297 - 1)$$
$$2(B_2 - C_2) = 0{,}002\,228\,254 \qquad (0{,}347\,9647 - 3)$$
$$2 C_2 = 0{,}000\,003\,363\,46 \qquad (0{,}526\,7862 - 6).$$

Nach dieser Formel hat *E. Hammer* in seiner Abhandlung: *Zur Abbildung des Erdellipsoids*, Stuttgart 1891, eine Tafel der Winkel ω aufgestellt, doch weichen die Koeffizienten seiner Formel ihrem Werte nach ein wenig von den unsrigen ab; bei ihm ist

$$\log 2(B_2 - C_2) = 0{,}347\,950 - 3$$
$$\log 2 C_2 = 0{,}521\,9 \quad - 6.$$

Dadurch werden die folgenden Werte, natürlich nur in den Bruchstellen der Sekunden, beeinflußt; immerhin hat I) den Vorzug, daß das erste Glied so sehr über die folgenden überwiegt.

Wir geben einige Werte von ω an.

φ	ω	$\varphi - \omega$	φ	ω	$\varphi - \omega$
0^0	$0^0\ 0'\ 0''$	$0'\ 0''$	55^0	$54^0\ 52'\ 46{,}96''$	$7'\ 13{,}04''$
30^0	$29^0\ 53'\ 21{,}6''$	$6'\ 38{,}4''$	60^0	$59^0\ 53'\ 20{,}8''$	$6'\ 39{,}2''$
40^0	$39^0\ 52'\ 26{,}7''$	$7'\ 33{,}3''$	89^0	$88^0\ 59'\ 43{,}93''$	$0'\ 16{,}07''$
45^0	$44^0\ 52'\ 19{,}53''$	$7'\ 40{,}47''$	90^0	$90^0\ 0'\ 0''$	$0'\ 0''$
50^0	$49^0\ 52'\ 26{,}3''$	$7'\ 33{,}7''$			

Wie man sieht, steigen die Werte von $(\varphi - \omega)$ zuerst an, erreichen in der Nähe von $\varphi = 45^0$ *ein Maximum* und fallen dann wieder auf Null herab. Wir stellen die Formel auf, welche diejenigen beiden Werte von φ und ω miteinander verbindet, für die der Unterschied $(\varphi - \omega)$ *am größten* ist.

Sei φ_1 und ω_1 ein zusammengehöriges Wertepaar oberhalb von 45^0, für das $\varphi_1 - \omega_1 = \delta$ ist, ferner φ_2 und ω_2 ein ebensolches Wertepaar unterhalb von 45^0, für das $\varphi_2 - \omega_2$ denselben Wert δ hat, dann ist

$$\varphi_1 - \omega_1 = \varphi_2 - \omega_2 = \delta,$$

folglich

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \omega_1 - \omega_2 = \nu.$$

Nach I) ist

$$\sin \omega_1 = A_2 \sin \varphi_1 - B_2 \sin 3\varphi_1 + C_2 \sin 5\varphi_1$$
$$\sin \omega_2 = A_2 \sin \varphi_2 - B_2 \sin 3\varphi_2 + C_2 \sin 5\varphi_2$$

$$\sin \omega_1 - \sin \omega_2 = A_2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) - B_2 (\sin 3\varphi_1 - \sin 3\varphi_2) + C_2 (\sin 5\varphi_1 - \sin 5\varphi_2)$$

$$2 \sin \frac{\nu}{2} \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) = 2 A_2 \sin \frac{\nu}{2} \cos \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) - 2 B_2 \sin \frac{3\nu}{2} \cos \left(\frac{3(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) + 2 C_2 \sin \frac{5\nu}{2} \cos \left(\frac{5(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right).$$

Da

$$\sin \frac{3\nu}{2} = \sin \frac{\nu}{2} (1 + 2 \cos \nu)$$
$$\sin \frac{5\nu}{2} = \sin \frac{\nu}{2} (2 \cos 2\nu + 2 \cos \nu + 1)$$

gesetzt werden können, so ist

$$\cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) = A_2 \cos \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) - B_2 (1 + 2 \cos \nu) \cdot \cos \left(\frac{3}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) \right) + C_2 (2 \cos 2\nu + 2 \cos \nu + 1) \cdot \cos \left(\tfrac{5}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) \right).$$

Lassen wir jetzt φ_1 und φ_2 sich dem bei 45^0 gelegenen Maximalwerte von $(\varphi - \omega)$ mehr und mehr nähern, doch so, daß stets

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \omega_1 - \omega_2 = \nu$$

ist, so wird bei dem Einrücken in den gesuchten größten Wert von $(\varphi - \omega)$

$$\varphi_1 = \varphi_2; \quad \omega_1 = \omega_2; \quad \nu = 0$$

sein. Demnach ist alsdann

1) $$\cos\omega = A_2 \cos\varphi - 3B_2 \cos 3\varphi + 5C_2 \cos 5\varphi$$

die gesuchte Beziehungsgleichung. Kombiniert man dieselbe mit I), so ergibt sich eine Gleichung 5. Grades zur Bestimmung von φ. Wir gehen hierauf nicht näher ein, sondern geben gleich das Resultat an:

$$\varphi = 45^0\ 7'\ 40{,}58''; \quad \omega = 45^0; \quad \varphi - \omega = 7'\ 40{,}58''.$$

§ 2. In ähnlicher Weise, wie es bereits im § 8 des ersten Kapitels geschehen ist, wollen wir jetzt untersuchen, um wieviel auf der Kugel vom Radius R ein Punkt mit der Breite ω absteht von einem solchen mit der Breite φ, wenn φ und ω durch die Gleichung I) miteinander verbunden sind, indem doch der Breitenunterschied $(\varphi - \omega)$ als das Maß für die Verzerrung bei der von uns bewirkten Abbildung des Erdsphäroids auf die Kugel zu gelten hat. Es hat ein Großkreisbogen von $1'$ auf unserer Kugel vom Radius R (I, § 16)

$$R = 6\,370\,289{,}511 \text{ m} \quad (\log R = 6{,}804\,1592)$$

eine Länge von

$$\frac{\pi R}{10800} = 1853{,}042 \text{ m},$$

demnach entspricht einer Verschiebung um $1''$ ein Bogen von 30,884 m Länge. Wir erhalten daher die folgende Tafel.

φ	$\varphi - \omega$	Verschiebung in Metern	φ	$\varphi - \omega$	Verschiebung in Metern
10^0	$2'\ 37{,}2''$	4 854,97	50^0	$7'\ 33{,}7''$	14 012,08
30^0	$6'\ 38{,}4''$	12 304,20	60^0	$6'\ 39{,}2''$	12 328,91
40^0	$7'\ 33{,}3''$	13 999,73	80^0	$2'\ 37{,}8''$	4 873,50
45^0	$7'\ 40{,}47''$	14 221,17			

Diese Verschiebungen treten auf der Oberfläche unserer Kugel in die Erscheinung, indem ein Punkt, der auf dem Erdellipsoid die geographische Breite φ hat, mit der Breite ω einzutragen

ist und dabei um $(\varphi - \omega)$ nach dem Äquator hin rückt. Nun hat ein Meridianquadrant auf der Kugel die Länge

$$\frac{\pi R}{2} = 10\,006\,428{,}6 \text{ Meter.}$$

Man ersieht daraus, daß ein Punkt mittlerer Breite auf der *nördlichen Halbkugel* rund um 1,42 pro Mille auf seinem Meridian *nach Süden* verschoben erscheint. Betrachtet man aber wiederum wie in I, § 8 statt der absoluten die *relativen* Verschiebungen, so erkennt man sofort deren minimale Größe.

§ 3. Von einem anderen Gesichtspunkte aus erhält man einen Einblick in die durch unsere Abbildung hervorgerufenen Verzerrungen, wenn man einige Meridianbögen des Erdsphäroids in Vergleich stellt zu den entsprechenden Bögen der Kugel. Unsere Untersuchung wird ganz ähnlich derjenigen zu führen sein, die wir in I, § 14 angestellt haben. Wir werden also einen elliptischen Meridianbogen in Vergleich zu stellen haben mit dem ihm entsprechenden Kugelbogen; wir werden *das Verhältnis beider* bestimmen müssen. Wegen der Krümmung der Flächen wird der Wert dieses Verhältnisses offenbar *um so genauer* erhalten werden, *je kleiner* die Bogenstücke sind, die man miteinander vergleicht. Wir werden also am besten tun, wenn wir *Bogendifferentiale* der Kugel einerseits und des Erdsphäroids andererseits miteinander in Beziehung setzen.

Es ist das Bogenelement eines Meridians auf der *Kugel*

$$d\sigma = R \cdot d\omega;$$

ferner, wie bekannt, das Bogenelement eines Meridians auf dem *Erdsphäroid*

$$ds = \frac{a(1-\varepsilon^2)\,d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}};$$

also

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{R\,(1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{a(1-\varepsilon^2)} \cdot \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Nach § 1 ist auf Grund des Ansatzes

$$2\pi R^2 \cos\omega\, d\omega = \frac{2\pi a^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2\cdot\sin^2\varphi)^2},$$

zu folgern:

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{R^2(1-\varepsilon^2\cdot\sin^2\varphi)^2\cos\omega}.$$

Setzen wir dies in $\frac{d\sigma}{ds}$ ein, so ist

II) $$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{a}{R \cdot (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos \omega}$$

der Wert des Verhältnisses zweier Meridianbogenelemente, die auf den beiden Flächen einander entsprechen.

Wir wollen, gestützt auf die Tabelle in § 1, den Wert von $\frac{d\sigma}{ds}$ für einige Werte von φ berechnen und die Resultate in einer neuen Tabelle zusammenstellen.

1) Für $\varphi = 0$ ist $\omega = 0$; daher ist

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{\varphi=0} = \frac{a}{R}$$
$$= \frac{6\,377\,397{,}155}{6\,370\,289}$$
$$= 1{,}001\,1156\,.$$

2) Für $\varphi = 30^0$ ist $\omega = 29^0\,53'\,21{,}6''$; daher ist

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{\varphi=30^0} = \frac{a}{R(1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 30^0)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\cos 30^0}{\cos 29^0\,53'\,21{,}6''}\,.$$

Zähler:

$\log a = 6{,}804\,643\,46$

$\log \cos 30^0 = 0{,}937\,530\,6 - 1$

$\log Z = 7{,}742\,174\,06 - 1$

$\varepsilon^2 \sin^2 30^0 = \frac{1}{4}\,\varepsilon^2$

$= \frac{1}{4} \cdot 0{,}006\,674\,372$

$= 0{,}001\,668\,593$

Nenner:

$\log R = 6{,}804\,159\,15$

$0{,}999\,637\,35 - 1$

$\log \cos 29^0 \cdots = 0{,}938\,013\,9 - 1$

$\log N = 8{,}741\,810\,4 - 2$

$1 - \frac{\varepsilon^2}{4} = 0{,}998\,331\,407$

$\log\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = (1{,}999\,2747 - 2) : 2$

$= 0{,}999\,637\,35 - 1$

$\log\left(\frac{d\sigma}{ds}\right) = 0{,}000\,363\,66$

$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{\varphi=30^0} = 1{,}000\,837\,7.$

3) Für $\varphi = 89^0$ ist $\omega = 88^0\,59'\,43{,}93''$; daher ist

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{\varphi=89^0} = \frac{a}{R(1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2 89^0)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\cos 89^0}{\cos 88^0\,59'\,43{,}93''}\,.$$

$$\log \varepsilon^2 = 0{,}824\,4104 - 3$$
$$\log \sin^2 89^0 = 0{,}999\,8676 - 1$$
$$1{,}824\,2780 - 4$$
$$\varepsilon^2 \sin^2 89^0 = 0{,}006\,672\,337$$
$$1 - \varepsilon^2 \sin^2 89^0 = 0{,}993\,327\,663$$
$$\log (1 - \varepsilon^2 \sin^2 89^0)^{\frac{1}{2}} = (1{,}997\,092\,572 - 2) : 2$$
$$= 0{,}998\,546\,286 - 1$$

Nenner:	*Zähler*:
$\log R = 6{,}804\,159\,15$	$\log a = 6{,}804\,643\,46$
$0{,}998\,546\,29 - 1$	$\log \cos 89^0 = 0{,}241\,855\,3 \; - 2$
$\log \cos 88^0 \cdots = 0{,}243\,789\,03 - 2$	$7{,}046\,498\,76 - 2$
$8{,}046\,494\,47 - 3$	$- 7{,}046\,494\,47 \mp 2$
	$\log \left(\frac{d\sigma}{ds}\right) = 0{,}000\,004\,29$

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{\varphi = 89^0} = 1{,}000\,01.$$

Wir haben absichtlich mit mehr als siebenstelligen Logarithmen gerechnet, um festzustellen, daß der Wert von $\frac{d\sigma}{ds}$ nicht unter 1 sinkt. Es liegt hier also eine gewisse Schwierigkeit für die Ermittelung von $\frac{d\sigma}{ds}$ vor, die sich noch bedeutend erhöht, wenn man $\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)_{\varphi = 90^0}$ bestimmen will. Da nämlich $\varphi = 90^0$ und $\omega = 90^0$ zusammengehörige Werte sind, so nimmt der Bruch $\frac{\cos \varphi}{\cos \omega}$ in diesem Falle die Form $\frac{0}{0}$ an, deren Wert zu ermitteln gerade hier recht mühevoll ist, jedoch, da nur von theoretischem Interesse, übergangen werden soll. Der Grund dafür liegt darin, daß die Formel I) des § 1 die Anfangsglieder einer Reihenentwickelung gibt, die für $\varphi > 80^0$ sehr schwach konvergiert, so daß es schwierig ist, sich ein scharfes Bild von der Abhängigkeit des ω von φ zu machen. Ein solches kann man erhalten, wenn man den Ansatz in § 1 *in geschlossener Form* integriert, was hier möglich ist, und jetzt der Vollständigkeit wegen noch gezeigt werden soll.

Es war nach § 1

$$R^2 \cos\omega\, d\omega = \frac{b^2 \cos\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)^2}$$

$$R^2 \int \cos\omega\, d\omega = b^2 \cdot \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)^2} + C.$$

Man setze

$$\sin\varphi = u, \quad \text{also} \quad \cos\varphi\, d\varphi = du,$$

so ist

$$R^2 \sin\omega = b^2 \cdot \int \frac{du}{(1-\varepsilon^2 u^2)^2} + C.$$

Nun ist

$$\frac{1}{(1-\varepsilon^2 u^2)^2} = \frac{1}{(1-\varepsilon u)^2 \cdot (1+\varepsilon u)^2}$$

$$= \frac{\alpha}{(1-\varepsilon u)} + \frac{\beta}{1+\varepsilon u} + \frac{\gamma}{(1-\varepsilon u)^2} + \frac{\delta}{(1+\varepsilon u)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)+\varepsilon u(\alpha-\beta)}{1-\varepsilon^2 u^2} + \frac{(\gamma+\delta)+2\varepsilon u(\gamma-\delta)+\varepsilon^2 u^2(\gamma+\delta)}{(1-\varepsilon^2 u^2)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\varepsilon u(\alpha-\beta+2\gamma-2\delta)-\varepsilon^2 u^2(\alpha+\beta-\gamma-\delta)-\varepsilon^3 u^3(\alpha-\beta)}{(1-\varepsilon^2 u^2)^2}$$

Zur Bestimmung der Konstanten α, β, γ, δ dienen also die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha+\beta+\ \gamma+\ \delta &= 1 \\ \alpha-\beta+2\gamma-2\delta &= 0 \\ \alpha+\beta-\ \gamma-\ \delta &= 0 \\ \alpha-\ \beta &= 0, \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \tfrac{1}{4}.$$

Daher ist

$$R^2 \sin\omega = b^2 \left\{ \int \tfrac{1}{4} \cdot \frac{du}{1-\varepsilon u} + \int \tfrac{1}{4} \cdot \frac{du}{1+\varepsilon u} + \int \tfrac{1}{4} \cdot \frac{du}{(1-\varepsilon u)^2} + \int \tfrac{1}{4} \cdot \frac{du}{(1+\varepsilon u)^2} \right\} + C,$$

$$R^2 \sin\omega = b^2 \left\{ -\frac{1}{4\varepsilon} \ln(1-\varepsilon u) + \frac{1}{4\varepsilon} \ln(1+\varepsilon u) + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon u} - \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \frac{1}{1+\varepsilon u} \right\} + C,$$

$$R^2 \sin\omega = b^2 \left\{ \frac{u}{2(1-\varepsilon^2 u^2)} + \frac{1}{4\varepsilon} \ln\left(\frac{1+\varepsilon u}{1-\varepsilon u}\right) \right\} + C.$$

Für $u = 0$, $\varphi = 0$, $\omega = 0$ ist auch $C = 0$. Demnach

$$R^2 \sin\omega = b^2 \cdot \left\{ \frac{\sin\varphi}{2(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)} + \frac{1}{4\varepsilon} \ln\left(\frac{1+\varepsilon \sin\varphi}{1-\varepsilon \sin\varphi}\right) \right\}.$$

Die Entwickelung der rechten Seite in Reihen führt auf die Gleichung I).

Stellen wir die von uns ermittelten Werte von $\frac{d\sigma}{ds}$ zusammen, so ergibt sich die nachfolgende Tafel.

φ	$\frac{d\sigma}{ds}$	φ	$\frac{d\sigma}{ds}$
0°	1,001 1156	50°	1,000 4642
30°	1,000 8377	60°	1,000 2796
40°	1,000 6564	89°	1,000 01
45°	1,000 5592		

§ 4. In derselben Weise sollen nun auch die Parallelkreise auf der Kugel, als dem Bilde des Erdsphäroids, in Vergleich gestellt werden mit den Parallelkreisen auf dem Original. Wir leiten dies durch die folgende Betrachtung ein. Da der Radius der Bildkugel

$$R = 6\,370\,289 \text{ m}$$

kleiner ist als

$$a = 6\,377\,397{,}155 \text{ m},$$

aber *größer* ist als

$$b = 6\,356\,078{,}96 \text{ m},$$

so muß offenbar die Kugel, die wir uns als konzentrisch mit dem Sphäroid vorstellen, dieses in zwei symmetrisch gelegenen Parallelkreisen schneiden. Diese sind also *längentreu* mit den entsprechenden des Rotationsellipsoides. Alle Parallelkreise, die von diesen aus mehr nach dem Äquator hin liegen, sind *kleiner*, die nach den Polen hin gelegenen *größer* als die gedachten auf dem Sphäroid.

Wir bestimmen die Lage des auf der nördlichen Halbkugel gelegenen längentreuen Parallels. Irgend ein Punkt P desselben (Figur 8) hat, insofern er ein Punkt des Rotationsellipsoids ist, die Abszisse

$$a \cdot \cos \psi,$$

wo ψ die *reduzierte* Breite dieses Punktes ist; er hat die Abszisse

$$R \cdot \cos \beta,$$

wo β die *geozentrische* Breite bedeutet, als Punkt der Kugel. Demnach ist

$$a \cos \psi = R \cdot \cos \beta.$$

Ferner ist, wie bekannt (I, § 6, d),

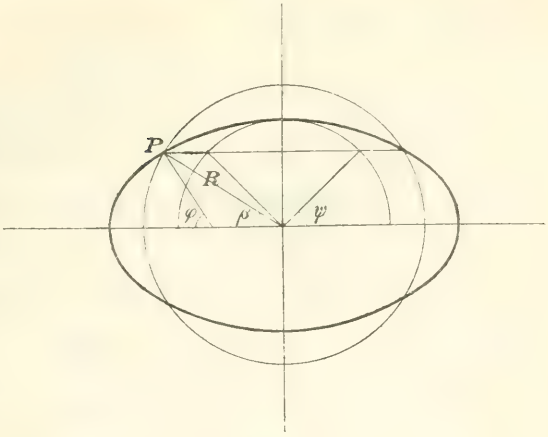
$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\beta$$

$$= \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi .$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\cos\psi = \frac{b}{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\beta + b^2}} .$$

Setzen wir dies in die vorhergehende Gleichung ein, so ergibt sich



Figur 8.

$$ab = R\cos\beta\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\beta + b^2},$$

$$\frac{a^2b^2}{R^2} = a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta ,$$

oder

$$\frac{a^2b^2}{R^2}(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta ,$$

$$a^2\sin^2\beta\,(b^2 - R^2) = b^2\cos^2\beta\,(R^2 - a^2),$$

oder

$$a^2\sin^2\beta\,(R^2 - b^2) = b^2\cos^2\beta\,(a^2 - R^2),$$

also

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - R^2}{R^2 - b^2}},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1}{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2}},$$

und daher

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{\left(\frac{a}{R}\right)^2 - 1}{1 - \left(\frac{b}{R}\right)^2}}.$$

$\log a = 6{,}804\,6435$	$\log b = 7{,}803\,1893 - 1$
$\log R = 6{,}804\,1592$	$\log R = 6{,}804\,1592$
$0{,}000\,4843 \cdot 2$	$(0{,}999\,0301 - 1) \cdot 2$

$$\log\left(\frac{a}{R}\right)^2 = 0{,}000\,9686 \qquad \log\left(\frac{b}{R}\right)^2 = 0{,}998\,0602 - 1$$

$$\left(\frac{a}{R}\right)^2 = 1{,}002\,2328 \qquad \left(\frac{b}{R}\right)^2 = 0{,}995\,5434$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{22\,328}{44\,566}}; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{22\,328}{44\,566}};$$

$$\log\operatorname{tg}\beta = 9{,}848\,468\,85 - 10; \quad \log\operatorname{tg}\varphi = 9{,}851\,377\,25 - 10;$$

$$\beta = 35^0\,12'\,4{,}4''. \qquad \varphi = 35^0\,22'\,55{,}77''.$$

Bestimmt man noch nach § 1, Formel I) das zu φ gehörige ω, so findet man

$$\omega = 35^0\,15'\,41{,}26'',$$

und ferner ist

$$\psi = 35^0\,17'\,29{,}9''.$$

Offenbar kann man jeden beliebigen Parallelkreis längentreu machen, indem man an die Stelle unserer Kugel vom Radius R, die wir als die *Normalkugel* bezeichnen wollen, eine andere vom Radius R_0 setzt, die mit ihr konzentrisch ist und das Sphäroid in dem gegebenen Parallelkreis mit der geographischen Breite φ_0 durchschneidet. Man hat dann nur aus φ_0 nach der Gleichung

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi_0$$

sowohl β_0 als ψ_0 zu bestimmen, und daraus auf Grund von

$$a\cos\psi_0 = R_0\cos\beta_0$$

das R_0 zu bestimmen. Weiteres über die günstigste flächentreue Abbildung eines gegebenen Flächenstücks des Erdsphäroids mit der Mittelbreite φ_0 auf einer Kugel vom Radius R_0 wolle man bei *E. Hammer*, l. c. ersehen.

Treten wir jetzt in die eigentliche Untersuchung der Parallelkreise ein, so wissen wir aus Kap. I, § 15, daß der Radius x eines Parallelkreises des Sphäroids gegeben ist durch

$$x = \frac{a\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}},$$

also ist ein Bogenelement ds' desselben bestimmt durch

$$ds' = x\,.\,d\lambda,$$

wo $d\lambda$ der entsprechende Centriwinkel ist, gemessen in Bogenmaß von dem Kreise, dessen Radius die Längeneinheit ist.

Unserem Parallelkreise mit der geographischen Breite φ

entspricht auf der Normalkugel ein solcher mit der Breite ω, dessen Radius

$$R \cos \omega$$

ist, für den also ein Bogenelement $d\sigma'$ sich ergibt als

$$d\sigma' = R \cdot \cos \omega \cdot d\lambda .$$

Demnach ist das Verhältnis zweier sich entsprechender Parallelkreis-Bogenelemente

$$\frac{d\sigma'}{ds'} = \frac{R \cdot \cos \omega \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}{a \cdot \cos \varphi},$$

III)
$$\frac{d\sigma'}{ds'} = \frac{ds}{d\sigma},$$

d. h. eine Tabelle der Werte, den das Verhältnis $\frac{d\sigma'}{ds'}$ für verschiedene Werte von φ annimmt, würde die *reziproken Werte* derjenigen Zahlen enthalten, die wir in der Tabelle am Schlusse von § 3 zusammengestellt haben.

Vor allem aber schließen wir aus Gleichung III), daß

IV)
$$\pi\, ds \cdot ds' = \pi\, d\sigma \cdot d\sigma'$$

ist. Dieser Gleichung kann man folgende, geometrisch anschauliche Bedeutung beilegen.

Man denke sich auf dem Erdsphäroid an einer Stelle N mit der Breite φ die Normale errichtet und verlängere dieselbe unendlich wenig in das *Innere* der Erde hinein bis zu einem gewissen Punkte M. Durch M lege man senkrecht zur Normale die Ebene; dieselbe wird das Erdsphäroid in einer *Ellipse* schneiden müssen. Dies läßt sich folgendermaßen klarlegen. Es ist die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b

$$\frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 .$$

Läßt man dieselbe um die z-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationsellipsoid, für welches man die Gleichung der Oberfläche erhält, wenn man

$$\varrho^2 = x^2 + y^2$$

setzt. Demnach ist *die Gleichung der Oberfläche des Erdsphäroids*

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 .$$

Die Gleichung irgend einer Ebene ist

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta .$$

Rechnet man hieraus z aus und setzt es in die Gleichung des Sphäroids ein, so erhält man die Gleichung eines Kegelschnitts, der offenbar hier, da er, wie die Anschauung lehrt, in sich geschlossen ist, nur *eine Ellipse* sein kann (in Ausnahmefällen ist er ein Kreis!). Diese unendlich nahe der Oberfläche des Sphäroids liegende Schnittellipse wollen wir betrachten. Die Halbachsen derselben werden sich von dem Meridianbogenelement ds und dem Parallelkreisbogenelement ds', die doch, wie im ersten Kapitel § 9 auseinandergesetzt worden ist, als *unendlich klein* und *geradlinig* zu denken sind, *nicht* oder nur um unendlich wenig *unterscheiden*. Also ist

$$\pi \cdot ds \cdot ds'$$

der *Flächeninhalt der Schnittellipse.*

Den Bogenelementen ds und ds' entsprechen auf der *Bildkugel* die ebenfalls *senkrecht aufeinander stehenden* Bogenelemente $d\sigma$ und $d\sigma'$. Verlängern wir jedes derselben über den gemeinsamen Schnittpunkt N' hinaus um sich selbst, so entsteht ein unendlich kleines rechtwinkliges Achsenkreuz, durch dessen vier Endpunkte wir uns ebenfalls eine Ellipse gelegt denken, deren Umfang aber ganz auf der Bild- oder Normalkugel liegen soll. Da eine Ebene die Kugel nur in einem Kreise schneiden kann, so kann die Ellipse, von der wir soeben sprachen, unmöglich eine ebene Figur sein, sie ist eine *sphärische Ellipse.* Wir nennen diese sphärische Ellipse die *Bildellipse.* Der Inhalt derselben ist unter Vernachlässigung von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung — sie ist ja nicht in einer Ebene gelegen —

$$\pi \cdot d\sigma \cdot d\sigma'.$$

Demnach folgern wir aus Gleichung IV) den Satz:

Der Inhalt der Schnittellipse des Erdsphäroids ist gleich dem Inhalt der Bildellipse auf der Bildkugel.

Dieser Satz erscheint, insofern er die prinzipiell geforderte Flächengleichheit ausspricht, trivial und selbstverständlich. Insofern er jedoch der Originalschnittellipse ein genau umschriebenes mathematisches Gebilde, eine *Ellipse als Bild* zuordnet, deren Punkte sowohl im Innern, als an der Grenze durch die Gleichung I) des § 1 gegeben sind, von der größten Bedeutung. Denn wir sind jetzt imstande, an die Frage heranzutreten, in

welchem Verhältnis steht ein Halbmesser $d\sigma''$ der Bildellipse, der unter einem beliebigen Winkel oder Azimut α gegen das Meridianelement $d\sigma$ geneigt von N' ausgeht, zu dem ihm entsprechenden Halbmesser ds'' der Schnittellipse, der unter demselben Azimut α gegen das Meridianelement ds geneigt von N bezw. M ausgeht? Die Antwort auf diese Frage vermittelt uns ein Satz aus der analytischen Geometrie, den wir zuerst entwickeln wollen.

Sind u und v die Halbachsen einer Ellipse, so ist deren Gleichung

$$\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1 .$$

Sei O der Anfangspunkt der Koordinaten, P ein beliebiger Punkt der Ellipse, so ziehen wir den Halbmesser OP und bezeichnen dessen Länge mit r. Hat P die Koordinaten x und y, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Indem r um den Winkel α gegen die große Halbachse u geneigt ist, besteht doch offenbar die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} .$$

Daher ist

$$r^2 = x^2 + x^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$$
$$r^2 = x^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$
$$r^2 = \frac{x^2}{\cos^2 \alpha} .$$

Andererseits folgt aber aus der Gleichung der Ellipse

$$v^2 x^2 + u^2 y^2 = u^2 v^2$$
$$v^2 x^2 + u^2 x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = u^2 v^2$$
$$x^2 (v^2 + u^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) = u^2 v^2$$
$$x^2 \frac{(v^2 \cos^2 \alpha + u^2 \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = u^2 v^2$$
$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} = \frac{u^2 v^2}{u^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha} .$$

Folglich ist

$$r^2 = \frac{u^2 v^2}{u^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha} .$$

Ersetzen wir also einmal für die Originalellipse u durch ds, v durch ds' und r durch ds'', ferner das andere Mal für die

Bildellipse u durch $d\sigma$, v durch $d\sigma'$ und endlich r durch $d\sigma''$, so erhalten wir

$$ds'' = \frac{ds \cdot ds'}{(ds^2 \cdot \sin^2\alpha + ds'^2 \cdot \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

$$d\sigma'' = \frac{d\sigma \cdot d\sigma'}{(d\sigma^2 \cdot \sin^2\alpha + d\sigma'^2 \cdot \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

folglich mit Rücksicht auf IV)

$$\left(\frac{d\sigma''}{ds''}\right)^2 = \frac{ds^2 \cdot \sin^2\alpha + ds'^2 \cdot \cos^2\alpha}{d\sigma^2 \cdot \sin^2\alpha + d\sigma'^2 \cdot \cos^2\alpha}.$$

Bezeichnen wir das Verhältnis zweier sich entsprechender Bogenelemente als das „*Vergrößerungs-* oder *Längenverhältnis*“, so ist *eine charakteristische Eigenschaft der Flächentreue: Das Längenverhältnis ist abhängig von dem Azimut α, unter dem das betrachtete Bogenelement gegen das Meridianelement ds geneigt ist.* Betrachten wir also für den Augenblick φ und ω als Konstante, indem wir die Orte N und N' nicht verlassen, denken wir uns für ds, ds', $d\sigma$, $d\sigma'$ die früher angegebenen Werte eingesetzt, so können wir uns für jedes Azimut α den zu ihm gehörigen Wert von $\frac{d\sigma''}{ds''}$ berechnen. Alle diese Werte wollen wir, mit der Benennung cm versehen, als von einem Punkte O ausgehende Strahlen in eine ebene Figur einzeichnen, und zwar jeden Wert unter demjenigen Winkel α gegen den Anfangsstrahl

$$\left(\frac{d\sigma''}{ds''}\right)_{\alpha=0} = \frac{ds'}{d\sigma'} = \frac{d\sigma}{ds} \quad \text{(Gleichung III)}$$

geneigt, wie dies in der Schnittellipse und in der Bildellipse der Fall ist. Wir fragen, welcher von allen diesen Strahlen, die unter den *variabeln* Winkel α geneigt sind, ist *der größte,* welcher ist *der kleinste?*

Dazu ermitteln wir das Maximum bezw. das Minimum von $\left(\frac{d\sigma''}{ds''}\right)^2$, indem wir die rechte Seite nach α differenzieren und das erhaltene Resultat gleich Null setzen. Bekanntlich ist

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{Z}{N}\right) = \frac{1}{N^2}\left(N \cdot \frac{dZ}{d\alpha} - Z \cdot \frac{dN}{d\alpha}\right).$$

Also muß

$$(d\sigma^2 \cdot \sin^2\alpha + d\sigma'^2 \cdot \cos^2\alpha)(ds^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - ds'^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha)$$
$$-(ds^2 \cdot \sin^2\alpha + ds'^2 \cdot \cos^2\alpha)(d\sigma^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - d\sigma'^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha) = 0$$

sein. Oder es ist

$$2 \sin \alpha \cos \alpha \, (ds^2 \cdot d\sigma'^2 - d\sigma^2 \cdot ds'^2) = 0.$$

Wegen der Gleichung III) ist die Klammer von Null verschieden. Daher ist entweder

$$\sin \alpha = 0,$$

d. h.

$$\alpha = 0^0.$$

$\alpha = 0$ entspricht $\frac{d\sigma}{ds}$, dessen Werte die Tabelle am Schlusse des § 3 angibt; sie sind sämtlich *größer* als Eins.

Oder es ist

$$\cos \alpha = 0,$$

d. h.

$$\alpha = 90^0.$$

Dann ist

$$\left(\frac{d\sigma''}{ds''}\right)_{\alpha = 90^0} = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)};$$

diese Werte sind sämtlich *kleiner* als Eins. Demnach bedeutet $\alpha = 0^0$ das Maximum und $\alpha = 90^0$ das Minimum. Unser Anfangsstrahl $\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)$ ist also der größte, der um 90^0 gegen ihn geneigte Wert von $\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)$ ist der kleinste unter allen Strahlen $\frac{d\sigma''}{ds''}$, deren Größe stetig von 0^0 bis 90^0 abnimmt, um dann von 90^0 bis 180^0 wieder zuzunehmen u. s. w., wie die Definitionsgleichung für $\left(\frac{d\sigma''}{ds''}\right)$ offenbar lehrt. Daraus leiten wir den Satz ab:

„Die Endpunkte aller von einem Punkte ausgehenden Strahlen, von denen jeder das Längenverhältnis seines Azimuts darstellt, liegen auf einer Ellipse. Der Inhalt dieser Ellipse ist

$$\pi \cdot \frac{d\sigma}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma} = \pi \cdot 1;$$

d. h.: *Bei einer flächentreuen Abbildung ist das Produkt der Halbachsen der charakteristischen Ellipse*, die wir *die Verzerrungsellipse* nennen wollen, *gleich der Einheit.*

A. Tissot hat diesen Satz an die Spitze der Sätze über Flächenverzerrung gestellt, durch ihn die *Flächentreue bei Abbildungen definierend.* In seinem Werke: Mémoire sur la repré-

sentation des surfaces et les projections des cartes géographiques, Paris 1881, nennt er unsere Verzerrungsellipse zuerst sachgemäß *„une sorte d'indicatrice"*, dann leider zu kurz *„indicatrice"*. Indem *Hammer* in dankenswerter Weise eine deutsche Bearbeitung übernahm, die 1887 bei *Metzler* in *Stuttgart* unter dem Titel erschien: *A. Tissot, Die Netzentwürfe geographischer Karten*, unterließ er die Worte *„une sorte d'"* zu übersetzen, und er gab so den Anlaß dazu, daß in deutschen Werken, ich nenne *Zöppritz-Bludau*, unsere *Verzerrungsellipse* einfach *„Indikatrix"* genannt wird. Es verstößt dies gegen einen fundamentalen Satz betreffend die Nomenklatur in der Mathematik, den niemand, der von der Mathematik Anwendung macht, unbeachtet lassen darf. Nach der von *Leonhard Euler* (geb. 1707 in Basel, gest. 1783 in Petersburg) gegebenen Definition für die Indikatrix, die in der Flächentheorie *ganz allgemein Eingang gefunden hat*, ist die Indikatrix eine Ellipse, die über die *Krümmung* an einer Stelle N einer Oberfläche, hier eines Sphäroids, Auskunft gibt. Was wir Deutschen kurz eine Indikatrix nennen, ist bei den Franzosen eine *indicatrice de courbure*. Was *Tissot* korrekt *une sorte d'indicatrice* nennt, ist eine *indicatrice de déformation ou d'altération*, darf also auf keinen Fall kurz Indikatrix genannt werden, weil sonst eine Verwirrung des Inhalts der ganz verschiedenen Begriffe entstehen würde. Damit ist die Einführung des neuen Namens *„Verzerrungsellipse"* (Deformationsellipse) genügend gerechtfertigt; ich hoffe, daß „die (falsche) Indikatrix" recht bald aus kartographischen Werken wieder verschwinden wird.

§ 5. Ein von der Flächentreue durchaus verschiedenes Abbildungsprinzip ist das der *Winkeltreue* oder der *Konformität. Das Bild steht in der Beziehung der Winkeltreue zum Original, wenn beide in ihren kleinsten Teilen ähnlich sind.* Wenn wir bei der Flächentreue den Ansatz machten

$$dF : dE = \lambda,$$

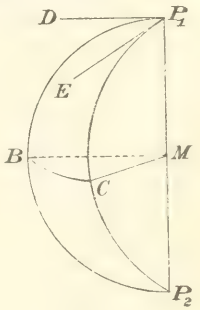
wo λ eine Konstante ist, und daraus durch Integration herleiteten:

$$F = \lambda \cdot E,$$

so besagt dies, wenn das Verhältnis, in dem ein unendlich kleines Teilchen der Fläche des Originals zu einem eben solchen des

Bildes steht, überall einen konstanten Wert hat, so steht auch die gesamte Fläche des Originals zu der gesamten Fläche des Bildes in demselben Verhältnis. Wir sagen, die Abbildung auf Grund der *Flächentreue* ist *ein Integralprinzip.*

Ganz anders ist es bei der Winkeltreue. Wir denken uns, um die Vorstellung zu fixieren, auf einer Kugel, vom Pole ausgehend, zwei Meridiane (Fig. 9). Unter dem Winkel, den diese beiden Meridiane an zwei verschiedenen Punkten miteinander bilden, versteht man dann den Winkel, den die Tangenten in diesen Punkten an die Meridiane gelegt, miteinander bilden. Diese Tangenten sind im allgemeinen sich kreuzende oder windschiefe Linien; ihr Winkel wird also erhalten, indem man durch eine der Tangenten in einem beliebigen Punkte die Parallele zu der anderen Tangente legt und den entstandenen Winkel mißt. Dieser Winkel ist aber fortwährenden Veränderungen unterworfen; er ist abhängig von der Wahl des Punktes, in dem man an den Meridian die Tangente zieht. Bilden z. B. die beiden Meridiane in ihrem Schnittpunkte am Pol einen rechten Winkel miteinander, so wird dieser Winkel kleiner und kleiner werden, wenn man je zwei Punkte der beiden Meridiane einander zuordnet, die gleichweit vom Pole auf den Meridianen entfernt sind, und in diesen zugeordneten Punkten jedesmal die Tangente an den Meridian legt. Offenbar sind dann die Schnittpunkte der beiden Meridiane mit dem Äquator einander entsprechende Punkte; legen wir in diesen die Tangenten an die Kugel, so sind diese Tangenten parallel. Der ursprüngliche Winkel von 90° hat also bis auf 0° abgenommen, um alsdann, wenn wir unsere Untersuchung bis zum nächsten Pole fortsetzen würden, wieder bis auf einen rechten Winkel zuzunehmen. Während also in der Ebene zwei gerade Linien in ihrem ganzen Verlaufe nur einen einzigen Winkel miteinander bilden, muß man auf einer gekrümmten Fläche, auf der zwei krumme Linien sich befinden, die Frage nach dem Winkel der beiden letzteren dahin stellen: welchen Winkel bildet ein Bogenelement der einen Kurve mit einem Bogendifferential der andern Kurve? Je nach der Wahl der Lage



Figur 9.

der Bogenelemente fällt die Antwort anders aus. Wir sagen daher, die Abbildung auf Grund der *Winkeltreue* oder *Konformität* ist *ein Differentialprinzip.* Damit behaupten wir nicht mehr und nicht weniger, als daß ohne Kenntnis der *Elemente der Differential- und Integralrechnung* ein tieferes Verständnis der konformen Abbildungsarten nicht erlangt werden kann. Wir brauchen zum Beweise dessen bloß auf das sonst so vortreffliche Werk von *Zöppritz-Bludau,* Leitfaden der Kartenentwurfslehre, Leipzig, Teubner, 1899, hinzuweisen, das an den betreffenden Stellen (S. 13, S. 115, S. 141) den Leser einfach im Stich läßt.

Entsprechend der bei der Flächentreue behandelten Aufgabe gehen wir jetzt über zur *winkeltreuen Abbildung des Erdsphäroids auf einer Kugel,* und wählen als solche eine *Normalkugel,* die mit dem Original konzentrisch ist und deren Meridiane durch Erweiterung der Ellipsoid-Meridianebenen entstehen. Da es sich nur um Winkelbeziehungen handelt, so kommt es selbstverständlich auf den Radius dieser Bildkugel nicht an; wir wählen ihn gleich dem Radius a des Äquators der Erde. Dann ist der Äquator des Sphäroids zugleich derjenige der Kugel; die Meridianebenen beider sind, wie schon erwähnt, identisch; der Nullmeridian der Erde sei zugleich der Nullmeridian der Kugel, also Kugellänge gleich Ellipsoidlänge. In der Darstellung folgen wir wieder der im § 1 zitierten Abhandlung von *Mollweide:* „Einige Projektionsarten der sphäroidischen Erde", die in ihrem ersten Kapitel die „Stereographische und Mercatorsche Projektion des elliptischen Erdsphäroids" behandelt und durch *E. Hammers* ebenfalls schon genannte Untersuchung: „Zur Abbildung des Erdellipsoids" eine wesentliche Ergänzung erfahren hat.

Wir denken uns Erdsphäroid und Bildkugel mit einem Netze von Meridianen und Parallelkreisen so dicht überzogen daß die Oberflächen beider mit unendlich vielen, also unendlich kleinen, Rechtecken bedeckt sind. Jedes von den Bogen zweier Meridiane und zweier Parallelkreise begrenzte unendlich kleine Viereck der Kugel soll demjenigen auf dem Sphäroid, dem es entspricht, *ähnlich* sein. Dazu ist nur nötig, daß *die homologen Seiten* beider Rechtecke *proportional* sind. Sind φ und $\varphi + d\varphi$ die Breiten, λ und $\lambda + d\lambda$ die Längen der vier Winkelpunkte eines solchen unendlich kleinen Rechtecks auf dem *Erdellipsoid,*

— sind ferner ψ_1 und $\psi_1 + d\psi_1$ die Breiten, λ und $\lambda + d\lambda$ die Längen der vier Winkelpunkte des dem vorhin bestimmten Elementarrechteck des Sphäroids entsprechenden Rechtecks der *Kugel*, so sind die Rechteckseiten auf

dem Erdsphäroid		*der Kuyel*
$ds = \frac{a(1-\varepsilon^2)\cdot d\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$	(Meridianbögen),	$d\sigma = a\,d\psi_1$,
$ds' = \frac{a\cdot\cos\varphi\cdot d\lambda}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$	(Parallelkreisbögen),	$d\sigma' = a\cos\psi_1 d\lambda$.

Wegen der Ähnlichkeit beider Rechtecke verhält sich demnach

$$ds : ds' = d\sigma : d\sigma',$$

oder

$$\frac{(1-\varepsilon^2)}{\cos\varphi\cdot(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)}\cdot\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{\cos\psi_1}\cdot\frac{d\psi_1}{d\lambda},$$

d. h.

$$\frac{d\psi_1}{\cos\psi_1} = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Wir schreiben

$$\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1-\varepsilon^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\varepsilon^2\cos\varphi}{(1+\varepsilon\sin\varphi)(1-\varepsilon\sin\varphi)}$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2\cos\varphi}{1+\varepsilon\sin\varphi} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2\cos\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}.$$

Es ist aber

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos\varphi}{1-\sin^2\varphi}$$

$$= \frac{\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)(1-\sin\varphi)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}.$$

Daher ist

$$\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2\cos\varphi}{1+\varepsilon\sin\varphi} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2\cos\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}$$

Demnach lautet die Differentialgleichung:

$$\frac{\cos\psi_1 \cdot d\psi_1}{1+\sin\psi_1} + \frac{\cos\psi_1 \cdot d\psi_1}{1-\sin\psi_1} = \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{1-\sin\varphi} - \frac{\varepsilon^2 \cos\varphi \cdot d\varphi}{1+\varepsilon\sin\varphi} - \frac{\varepsilon^2 \cos\varphi \cdot d\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}.$$

Die Integration derselben ergibt sofort, indem man *natürliche Logarithmen* (ln) erhält und $\varphi = 0$ und $\psi_1 = 0$ einander zuordnet:

$$\ln(1+\sin\psi_1) - \ln(1-\sin\psi_1) = \ln(1+\sin\varphi) - \ln(1-\sin\varphi) - \varepsilon\ln(1+\varepsilon\sin\varphi) + \varepsilon\ln(1-\varepsilon\sin\varphi)$$

oder

$$\ln\left(\frac{1-\sin\psi_1}{1+\sin\psi_1}\right) = \ln\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right) + \varepsilon\ln\left(\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right).$$

Bekanntlich ist

$$\sin\psi_1 = \cos(90^0 - \psi_1).$$

Folglich ist

$$1-\sin\psi_1 = 1-\cos(90^0-\psi_1) = 2\cdot\sin^2\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right),$$

$$1+\sin\psi_1 = 1+\cos(90^0-\psi_1) = 2\cdot\cos^2\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right).$$

Daher ist

$$2\ln\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\psi_1}{2}\right) = 2\ln\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right) + \varepsilon\ln\left(\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right),$$

$$\ln\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\psi_1}{2}\right) = \ln\left\{\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$$

V) $$\operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\psi_1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^0-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Zur bequemeren Berechnung von ψ_1 als Funktion von φ wendet man Reihenentwickelungen an, die wir durch die folgende Untersuchung vorbereiten.

§ 6. Die Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta = m\cdot\operatorname{tg}\gamma$$

tritt uns bei sphärischen Problemen recht häufig entgegen. In der Trigonometrie des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks sind die Formeln

$$\cos\alpha = \operatorname{tg} b\cdot\operatorname{cot} c, \qquad \sin\alpha = \operatorname{cot}\beta\cdot\operatorname{tg} b$$

wohlbekannt; sie können geschrieben werden

$$\operatorname{tg} b = \cos\alpha\cdot\operatorname{tg} c, \qquad \operatorname{tg} b = \sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

Die Umformung der Fundamentalgleichung aus der Trigonometrie des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

auf die für die Rechnung bequemere Form

$$\cos a = \frac{\cos b \cos (c - \varphi)}{\cos \varphi}$$

geschieht mit Hilfe der Substitution

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} b.$$

Ein gleiches gilt von der Fundamentalgleichung

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a,$$

die durch die Substitution

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos a \cdot \operatorname{tg} \beta$$

in die neue Form

$$\cos \alpha = -\frac{\cos \beta \cos (\gamma + \varphi)}{\cos \varphi}$$

übergeht.

Im § 6, e des I. Kapitels fanden wir den Zusammenhang zwischen geographischer, geozentrischer und reduzierter Breite vermittelt durch die Beziehungsgleichung

$$\operatorname{tg} (\varphi + \beta) = 1{,}000\,0055 \cdot \operatorname{tg} (2\,\psi).$$

Indem wir am Schlusse des vorigen Paragraphen auf eine Gleichung von dem nämlichen Typus geführt wurden, darf es uns nicht wundernehmen, daß ein so bedeutender Mathematiker wie *Lagrange* (geb. 1736 in Turin, gest. 1813 in Paris; von 1766—1786 in Berlin) einer Gleichung von so allgemeiner Bedeutung seine Aufmerksamkeit gewidmet hat. Wir finden seine Untersuchung auf S. 216—217 der Abhandlungen (Mémoires) der Berliner Akademie für 1776; dieselben sind erst 1779 gedruckt, obgleich *Lagrange* seine Abhandlung bereits 1774 gelesen hatte; ihr Titel ist: Solution de quelques problèmes d'Astronomie sphérique par le moyen des séries (S. 214—235).

Lagrange setzt an

$$\operatorname{tg} x = \cos \omega \cdot \operatorname{tg} y.$$

Bekanntlich ist

$$\operatorname{tg} u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{i\,(e^{iu} + e^{-iu})},$$ wenn u im Bogenmaß gemessen ist.

Setzen wir dies ein, so folgt

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = \cos\omega \cdot \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{e^{iy}+e^{-iy}},$$

$$\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1} = \cos\omega \cdot \frac{e^{2iy}-1}{e^{2iy}+1}.$$

Wir berechnen hieraus e^{2ix} und erhalten

$$e^{2ix} = \frac{e^{2iy}+1+\cos\omega\,(e^{2iy}-1)}{e^{2iy}+1-\cos\omega\,(e^{2iy}-1)},$$

$$e^{2ix} = \frac{(1+\cos\omega)\,e^{2iy}+(1-\cos\omega)}{(1-\cos\omega)\,e^{2iy}+(1+\cos\omega)}.$$

Wir machen die Substitution

$$\theta = \frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega},$$

dann entsteht

$$e^{2ix} = \frac{e^{2iy}+\theta}{\theta e^{2iy}+1},$$

$$e^{2ix} = e^{2iy}\cdot\frac{1+\theta\cdot e^{-2iy}}{1+\theta\cdot e^{+2iy}}.$$

Wir gehen zu den *natürlichen* Logarithmen über und bekommen:

$$2ix = 2iy + \ln(1+\theta\cdot e^{-2iy}) - \ln(1+\theta\cdot e^{+2iy}).$$

Bekanntlich ist

$$\ln(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^5}{5} - \cdots$$

eine konvergente Reihe, so lange $v<1$ ist. Wofern also

$$\theta\cdot e^{-2iy}<1 \quad \text{und} \quad \theta\cdot e^{+2iy}<1, \quad \text{also } \theta^2<1$$

ist, können wir unsere Bestimmungsgleichung für x schreiben:

$$2ix = 2iy + \left(\theta\cdot e^{-2iy} - \frac{\theta^2\cdot e^{-4iy}}{2} + \frac{\theta^3\cdot e^{-6iy}}{3} - \frac{\theta^4\cdot e^{-8iy}}{4} \pm \cdots\right)$$
$$- \left(\theta\cdot e^{+2iy} - \frac{\theta^2\cdot e^{+4iy}}{2} + \frac{\theta^3\cdot e^{+6iy}}{3} - \frac{\theta^4\cdot e^{+8iy}}{4} \pm \cdots\right).$$

$$2ix = 2iy - \theta\cdot 2i\,\frac{(e^{2iy}-e^{-2iy})}{2i} + \frac{\theta^2}{2}\cdot 2i\,\frac{(e^{4iy}-e^{-4iy})}{2i}$$
$$- \frac{\theta^3}{3}\cdot 2i\,\frac{(e^{6iy}-e^{-6iy})}{2i} + \frac{\theta^4}{4}\cdot 2i\,\frac{(e^{8iy}-e^{-8iy})}{2i} \mp \cdots,$$

daher endgültig

VI) $x = y - \theta \cdot \sin 2y + \frac{\theta^2}{2} \cdot \sin 4y - \frac{\theta^3}{3} \cdot \sin 6y + \frac{\theta^4}{4} \cdot \sin 8y - \cdots,$

wenn die Größen x und y im Bogenmaß gemessen sind.

Wir machen, bevor wir zur Gleichung V) zurückkehren, vorerst eine Anwendung von dieser Formel auf die Gleichung (Kapitel I, § 6, e)

$$\operatorname{tg}(\varphi + \beta) = 1{,}000\,0055 \cdot \operatorname{tg}(2\psi).$$

Es ist hier

$$x = \varphi + \beta, \quad y = 2\psi, \quad \cos\omega = 1{,}000\,0055\,.$$

Da in den soeben gegebenen Entwickelungen nirgends ausgesprochen ist, daß $\cos\omega < 1$ sein muß, so gilt $\cos\omega$ nur als Symbol für die gegebene Konstante. Es ist also

$$\theta = \frac{1 - \cos\omega}{1 + \cos\omega} = \frac{1 - 1{,}000\,0055}{1 + 1{,}000\,0055},$$

$$\theta = -\frac{55}{20\,000\,055},$$

$$\theta = -\,0{,}000\,002\,75.$$

Demnach ist

$$\varphi + \beta = 2\psi + 0{,}000\,002\,75 \sin 4\psi + 0{,}000\,000\,000\,003\,78 \sin 8\psi \cdots$$

der genaue Ausdruck für den Zusammenhang der drei früher definierten Breiten, wenn die *Bessel*schen Dimensionen des Erdsphäroids zu Grunde gelegt werden. Vor der wirklichen Benutzung der Formel hat man die *Bogengrößen* φ, β und ψ erst noch in *Winkelgrößen* umzurechnen, d. h. es sind die Koeffizienten von $\sin 4\psi$ und $\sin 8\psi$ mit $\left(\frac{648\,000}{\pi}\right)''$ zu multiplizieren.

§ 7. Wir kehren jetzt wieder zur Gleichung V) zurück und haben, wenn wir Gleichung VI) anwenden wollen, zu setzen:

$$x = 45^0 - \frac{\psi_1}{2}; \qquad y = 45^0 - \frac{\varphi}{2};$$

$$\cos\omega = \left(\frac{1 + \varepsilon \sin\varphi}{1 - \varepsilon \sin\varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Demnach ist

$$\theta = \frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon\sin\varphi)^{\frac{\varepsilon}{2}} - (1+\varepsilon\sin\varphi)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{(1-\varepsilon\sin\varphi)^{\frac{\varepsilon}{2}} + (1+\varepsilon\sin\varphi)^{\frac{\varepsilon}{2}}}$$

$$= \frac{1-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin\varphi + \frac{\varepsilon^3(\varepsilon-2)}{8}\sin^2\varphi - \frac{\varepsilon^4(\varepsilon-2)(\varepsilon-4)}{48}\sin^3\varphi - 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin\varphi - \frac{\varepsilon^3(\varepsilon-2)}{8}\sin^2\varphi - \frac{e^4(\varepsilon-2)(\varepsilon-4)}{48}\sin^3\varphi}{1-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin\varphi + \frac{e^3(\varepsilon-2)}{8}\sin^2\varphi + 1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin\varphi + \frac{\varepsilon^3(\varepsilon-2)}{8}\sin^2\varphi \cdots}$$

$$= \frac{-\varepsilon^2\cdot\sin\varphi - \frac{\varepsilon^4}{3}\sin^3\varphi}{2+\frac{\varepsilon^3(\varepsilon-2)}{4}\sin^2\varphi}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\varepsilon^2\sin\varphi + \frac{\varepsilon^4}{3}\sin^3\varphi\right)\cdot\left(1+\frac{\varepsilon^3(\varepsilon-2)}{8}\sin^2\varphi\right)^{-1},$$

$$\theta = -\frac{\varepsilon^2}{2}\sin\varphi - \frac{\varepsilon^4}{6}\sin^3\varphi,$$

wenn man alle Potenzen von ε, die höher sind als die vierte, vernachlässigt.

Also geht aus der Gleichung V) die folgende Beziehung zwischen den Winkeln hervor

$$45^0 - \frac{\psi_1}{2} = 45^0 - \frac{\varphi}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin\varphi\cdot\left(1+\frac{\varepsilon^2}{3}\sin^2\varphi\right)\sin(90^0-\varphi) + \frac{\varepsilon^4\sin^2\varphi}{8}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{3}\sin^2\varphi\right)^2\cdot\sin(180^0-2\varphi),$$

$$\psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{3}\sin^2\varphi\right)\sin 2\varphi - \frac{\varepsilon^4}{4}\sin^2\varphi\sin 2\varphi,$$

wenn man wieder Potenzen von ε vernachlässigt, die höher sind als die vierte.

Ersetzt man $\sin^2\varphi$ durch

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

so ist

$$\psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\varphi\cdot\left(1+\frac{5}{6}\varepsilon^2\sin^2\varphi\right),$$

$$\psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\varphi\cdot\left(1+\frac{5}{12}\varepsilon^2 - \frac{5}{12}\varepsilon^2\cos 2\varphi\right),$$

Va) $$\psi_1 = \varphi - \left(\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{5}{24}\varepsilon^4\right)\sin 2\varphi + \frac{5}{48}\varepsilon^4\sin 4\varphi.$$

Da der Formel VI) die Annahme zu Grunde liegt, daß die Winkelgrößen im Bogenmaß gemessen sind, so haben wir die Gleichung Va) noch in Winkelmaß umzurechnen. Wählen wir *Sekunden* als solches, so entspricht der Bogeneinheit eine Winkelgröße von $\left(\frac{648\,000}{\pi}\right)$ Sekunden. Demnach ist

$$\psi_1 = \varphi - \left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{5}{24}\varepsilon^4\right)\cdot\left(\frac{648\,000}{\pi}\right)''\cdot\sin 2\varphi + \frac{5}{48}\varepsilon^4\cdot\left(\frac{648\,000}{\pi}\right)''\cdot\sin 4\varphi.$$

Vb) $\psi_1 = \varphi - 690{,}258''\cdot\sin 2\varphi + 0{,}957\,14''\cdot\sin 4\varphi,$

indem wir den *Bessel*schen Wert für ε^2

$$\varepsilon^2 = 0{,}006\,674\,3722 \quad (\log \varepsilon^2 = 0{,}824\,4104 - 3)$$

als gegeben ansehen. Dabei ergibt sich

$$\log 690{,}258 = 2{,}839\,0116$$
$$\log 0{,}957\,14 = 0{,}980\,9749 - 1.$$

Aus der Gleichung Vb) erkennt man sofort, daß

$$\varphi = 0^0\,, \qquad \psi_1 = 0^0$$
$$\varphi = 45^0, \qquad \psi_1 = 44^0\,48'\,29{,}742''$$
$$\varphi = 90^0, \qquad \psi_1 = 90^0$$

ist, daß im allgemeinen ψ_1 hinter φ zurückbleibt, und daß die Differenz zwischen φ und ψ_1 in der Nähe von $\varphi = 45^0$ am größten ist. Bestimmen wir also zuerst denjenigen Winkel φ', bei dem die Maximaldifferenz $\varphi' - \psi_1'$ wirklich eintritt. Wir setzen an

$$\varphi - \psi_1 = p_1 \sin 2\varphi - p_2 \sin 4\varphi.$$

Unterhalb von 45^0 gibt es Werte $\overline{\varphi}$ und $\overline{\psi}_1$ und oberhalb 45^0 gibt es Werte φ^* und ψ_1^* so beschaffen, daß

$$\overline{\varphi} - \overline{\psi}_1 = \varphi^* - \psi_1^*$$

ist. Dann ist also

$$p_1 \sin 2\overline{\varphi} - p_2 \sin 4\overline{\varphi} = p_1 \sin 2\varphi^* - p_2 \sin 4\varphi^*,$$

oder

$$p_1(\sin 2\overline{\varphi} - \sin 2\varphi^*) = p_2(\sin 4\varphi - \sin 4\varphi^*)$$
$$p_1 \sin(\overline{\varphi} - \varphi^*)\cdot\cos(\overline{\varphi} + \varphi^*) = p_2 \sin(2\overline{\varphi} - 2\varphi^*)\cdot\cos(2\varphi + 2\varphi^*)$$
$$p_1\cdot\cos(\overline{\varphi} + \varphi^*) = 2p_2\cdot\cos(\overline{\varphi} - \varphi^*)\cdot\cos(2\overline{\varphi} + 2\varphi^*).$$

Da aus

$$\overline{\varphi} - \overline{\psi}_1 = \varphi^* - \psi_1^*$$

folgt

$$\overline{\varphi} - \varphi^* = \overline{\psi}_1 - \psi_1^*,$$

so lassen wir jetzt $\overline{\varphi}$ und φ^*, also auch $\overline{\psi}_1$ und $\psi_1{}^*$ einander sich mehr und mehr nähern; es wird die Maximaldifferenz zwischen φ und ψ_1 dann eintreten, wenn

$$\overline{\varphi} - \varphi^* = 0, \qquad \overline{\psi}_1 - \psi_1{}^* = 0,$$

d. h. wenn

$$\overline{\varphi} = \varphi^* = \varphi',$$
$$\overline{\psi}_1 = \psi_1{}^* = \psi_1{}'$$

ist, wo φ' und $\psi_1{}'$ die gesuchten *Maximalwerte* bedeuten. Es ist dann

$$p_1 \cos 2\varphi' = 2p_2 \cos 4\varphi',$$

welche Gleichung man auch sofort hätte erhalten können, wenn man

$$\varphi - \psi_1 = p_1 \sin 2\varphi - p_2 \sin 4\varphi$$

nach φ differenziert und die rechte Seite gleich Null setzt. Weiter ist

$$2p_2 (2\cos^2 2\varphi' - 1) = p_1 \cos 2\varphi',$$

$$\cos^2 2\varphi' - \frac{p_1}{4p_2} \cos 2\varphi' = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cos 2\varphi' = \frac{1}{8} \frac{p_1}{p_2} - \sqrt{\frac{p_1{}^2}{64 p_2{}^2} + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{690{,}258}{0{,}95\,714} - \sqrt{90{,}146\,04^2 + 0{,}5}$$

$$= 90{,}146\,04 - 90{,}148\,82$$

$$= -\,0{,}002\,78.$$

$$180^0 - 2\varphi' = 89^0\,50'\,26{,}583''$$

$$2\varphi' = 90^0\,9'\,33{,}417''$$

$$\varphi' = 45^0\,4'\,46{,}7085''.$$

Daher

$$\psi_1{}' = \varphi' - 690{,}258'' \cdot \sin 2\varphi' + 0{,}957\,14'' \cdot \sin 4\varphi'.$$

$$\varphi' - \psi_1{}' = 690{,}258'' \cdot \sin 89^0\,50'\,26{,}583''$$
$$+ 0{,}957\,14'' \cdot \sin 0^0\,19'\,6{,}834''$$

$$\varphi' - \psi_1{}' = 690{,}261''$$

$$\varphi' - \psi_1{}' = 11'\,30{,}261'',$$

und demnach

$$\psi_1{}' = 44^0\,53'\,16{,}448''.$$

Im I. Kapitel, § 6, d hatten wir ermittelt, daß der *größte*

Unterschied zwischen der *geographischen* und der *geozentrischen Breite*

$$\varphi' - \beta' = 0^0\ 11'\ 30{,}66''$$

beträgt, während hier

$$\varphi' - \psi_1' = 0^0\ 11'\ 30{,}26''$$

ist, so daß sich also die beiden Differenzen nur um

0,4 Sekunden

unterscheiden.

Wir wollen uns schnell die Frage beantworten, welches der *größte Unterschied* zwischen ψ_1 und β ist.

Es war

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}\cdot \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\beta = (1-\varepsilon^2)\operatorname{tg}\varphi,$$

daher mit Rücksicht auf § 6, Formel VI), S. 87,

$$\theta = \frac{1-(1-\varepsilon^2)}{1+(1-\varepsilon^2)}$$

$$\theta = \frac{\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right);$$

$$\beta = \varphi - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\sin 2\varphi + \frac{\varepsilon^4}{8}\sin 4\varphi.$$

Es war nach Va)

Va) $$\psi_1 = \varphi - \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1+\frac{5}{12}\varepsilon^2\right)\sin 2\varphi + \frac{5}{48}\varepsilon^4 \sin 4\varphi.$$

Daraus leiten wir ab

$$\beta - \psi_1 = -\frac{1}{24}\varepsilon^4 \sin 2\varphi + \frac{1}{48}\varepsilon^4 \sin 4\varphi,$$

$$\beta - \psi_1 = -\frac{1}{24}\varepsilon^4\left(\sin 2\varphi - \frac{1}{2}\sin 4\varphi\right).$$

Die größte Differenz wird demnach, wie wir bei $\varphi - \psi_1$ bemerkt haben, gefunden, wenn wir die rechte Seite nach φ differenzieren und den erhaltenen Ausdruck gleich Null setzen. Es ergibt sich

$$2\cos 2\varphi' - 2\cos 4\varphi' = 0.$$

$$\cos 2\varphi' = \cos 4\varphi',$$

d. h. das frühere p_1 ist hier 1, und das frühere p_2 hier $\frac{1}{2}$. Also ist

$$\cos 2\varphi' = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}$$

$$\cos 2\varphi' = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\cos 2\varphi' = -\frac{1}{2}$$

$$2\varphi' = 120^0$$

$$\varphi' = 60^0.$$

Daher ist

$$\psi_1' - \beta' = \frac{1}{24}\varepsilon^4\left(\sin 120^0 - \frac{1}{2}\sin 240^0\right) \cdot \left(\frac{648\,000}{\pi}\right) \text{Sekunden}$$

$$= \frac{1}{24}\varepsilon^4 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot 206\,264{,}806''$$

$$= 0{,}497 \text{ Sekunden.}$$

Auf dieses interessante Resultat hat *Mollweide* schon aufmerksam gemacht; wir sprechen es durch den Satz aus:

„Die winkeltreue (konforme) Abbildung eines wenig abgeplatteten Rotationsellipsoids auf die konzentrische Normalkugel mit identischen geographischen Längen stimmt nahezu überein — der Fehler beträgt noch nicht $^1/_2$ Sekunde — *mit der Zentralprojektion des Sphäroids auf jene Kugelfläche vom Mittelpunkte aus.“*

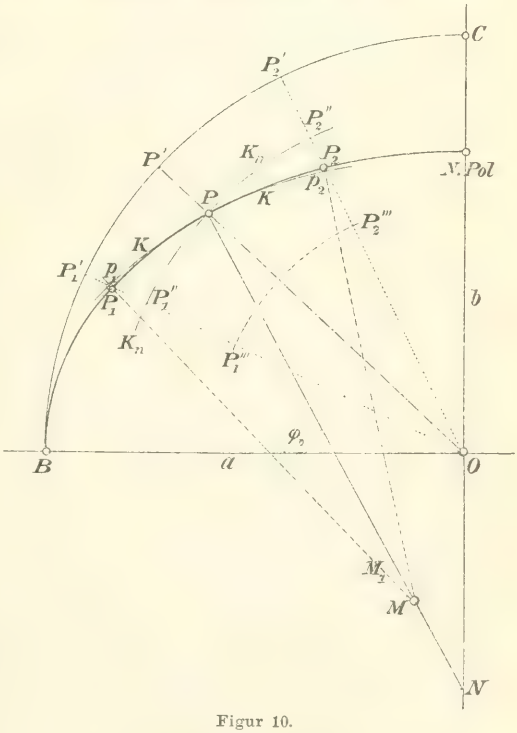
E. Hammer (Zur Abbildung des Erdellipsoids) hat sich der Mühe unterzogen unter Zugrundelegung der Formel Vb) eine Tabelle der ψ_1 anzufertigen, wenn die φ von 10′ zu 10′ steigen. Wir geben einen Auszug aus derselben und verweisen im übrigen auf die Originalabhandlung (Stuttgart 1891, K. Wittwer, 40 S.; auch Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1891, S. 609 u. 641 ff.).

φ	ψ_1	φ	ψ_1	φ	ψ_1
0°	0° 0′ 0,00″	40°	39° 48′ 40,55″	58°	57° 49′ 38,85″
1°	0° 59′ 35,97″	45°	44° 48′ 29,74″	60°	59° 50′ 1,39″
5°	4° 58′ 0,46″	50°	49° 48′ 39,90″	70°	69° 52′ 35,37″
10°	9° 56′ 4,53″	52°	51° 48′ 49,80″	80°	79° 56′ 3,30″
20°	19° 52′ 37,25″	54°	53° 49′ 2,96″	89°	88° 59′ 35,84″
30°	29° 50′ 3,05″	56°	55° 49′ 19,34″	90°	90° 0′ 0,00″

§ 8. Wenn wir uns der Tatsache erinnern, daß die im ersten Kapitel ausführlich behandelte Abbildung des Sphäroids auf einer Kugel vermittels der *reduzierten Breiten* ψ auf eine

Maximaldifferenz zwischen φ und ψ führte, die *nur halb so groß* war, wie die soeben erhaltene zwischen φ und ψ_1 bei der *winkeltreuen Abbildung*, so liegt die Frage nahe, ob denn das Abbildungsprinzip, das wir, wie es scheint, mit Nachteil eingetauscht haben, ein so wertvolles ist. Wir dürfen diese Frage mit Fug und Recht bejahen; ist es doch dem Genie eines *Gauß* (geb. 30. April 1777 zu Braunschweig, gest. 23. Febr. 1855 zu Göttingen) gelungen, die von *Mollweide* begonnene Untersuchung in einer Weise fortzusetzen, daß das Resultat den höchsten Anforderungen gerecht wird; einen wertvollen Baustein hat dann *E. Hammer* in seiner schon zitierten Abhandlung dem ganzen Werke eingefügt.

Es ist nämlich unsere winkeltreue Abbildung mit den Normalkugelbreiten ψ_1 und Längenunterschieden, die mit den auf dem Rotationsellipsoid vorhandenen übereinstimmen, für ein gegebenes Flächenstück des Sphäroids mit der Mittelbreite φ_0 keineswegs die günstigste. Bedenken wir, daß in der Formel V) der Kugelradius a gar nicht vorkommt, so könnte man zuerst daran denken, eine Verbesserung dadurch herbeizuführen, daß man auf einer Kugel abbildet, welche etwa den Mittelparallel φ_0 *längentreu* abbildet. Ist $OP = r$ der Radius der gedachten Kugel (Figur 10), so würde der Radius des betreffenden Parallelkreises auf der Kugel $r \cdot \cos \psi_0$, und auf dem Sphäroid (I, § 15)



Figur 10.

$$\frac{a \cdot \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_0}}$$

sein; es würde sich demnach r durch die Gleichung bestimmen:

$$r \cdot \cos \psi_0 = \frac{a \cos \varphi_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_0}}.$$

Hammer gibt zur Entscheidung dieser Frage folgende kleine Skizze. Die Mittelbreite φ_0 sei

$$\varphi_0 = 52^0\,42'\,2{,}5'';$$

die Grenzparallelkreise mögen die Breiten

$$\varphi = 47^0\,40' \quad \text{bezw.} \quad \varphi = 57^0\,40'$$

haben. Ihnen entsprechen die Winkel

$$\psi_1 = 47^0\,28'\,32{,}5'' \quad \text{bezw.} \quad \psi_1 = 57^0\,29'\,35{,}4''.$$

Es ergibt sich für den Radius r der Normalkugel nach der obigen Formel

$$\log r = 6{,}803\,7279\,.$$

Berechnet man die Längen der Parallelkreisbögen auf Ellipsoid und Kugel für einen Bogen von 10^0, so erhält man

Sphäroid	*Normalkugel r*	*Längenverhältnis*
750 957 m	750 740 m	$[9{,}999\,8746] \sim 1 - \frac{1}{3400}$
596 740 m	596 902 m	$[0{,}000\,1181] \sim 1 + \frac{1}{3700}$.

Kleine Bögen sind demnach auf dieser Normalkugel in der geographischen Breite $47^0\,40'$ um rund $\frac{1}{3400}$ *zu kurz*, in $57^0\,40'$ Breite um rund $\frac{1}{3700}$ *zu lang* abgebildet. Der ganze Meridianbogen zwischen den angegebenen Parallelkreisen ergibt sich durch Rechnung auf 1 112 659 m Länge auf der Kugel, hingegen auf 1 112 664 m Länge auf dem Ellipsoid, also nur um 5 m länger. Man könnte sich also für viele Zwecke, im besondern für eine vielblättrige zusammenhängende Karte von Deutschland im Maßstabe 1 : 25 000, mit dieser Normalkugel r begnügen. Aber wie immer ist das Bessere der Feind des Guten. *Gauß* kam nämlich auf den Gedanken, die *Mollweide*sche Normalkugel auf einer anderen Kugel *winkeltreu* abzubilden.

Bevor wir in diese Erweiterung unserer bisherigen Untersuchung eintreten, beweisen wir eine fundamentale Eigenschaft der winkeltreuen Abbildung. Nach § 5 besteht die Grundgleichung

$$ds : ds' = d\sigma : d\sigma', \quad \text{oder} \quad ds : d\sigma = ds' : d\sigma';$$

sie verbindet die Bögen entsprechender Meridiane mit den Bögen der darauf *senkrechten* sich entsprechenden Parallelkreise. Wir werfen die Frage auf, wie verhalten sich Elementarbögen in irgend welcher Richtung zueinander, wenn der eine der Normalkugel, der andere dem Ellipsoid angehört?

Es sei ds'' das Bogenelement auf dem Sphäroid, das unter dem Winkel oder Azimut α gegen den Meridian, dessen Element ds ist, vom gemeinsamen Schnittpunkte P von ds und ds' ausgeht. Ihm entspreche auf der Kugel das Bogenelement $d\sigma''$, das wegen der vorausgesetzten Ähnlichkeit unendlich kleiner Teile von Bild und Original unter demselben Azimut α von dem gemeinsamen Punkte Q der Elementarbögen $d\sigma$ und $d\sigma'$ ausgeht. Senken wir dann im Punkte P in eine Tiefe, die unendlich klein ist, die *Eulersche Schnittellipse* in das Rotationsellipsoid (§ 4, Schluß), so ist ds'' ein halber Durchmesser dieser Ellipse.

Nach § 4 ist

$$ds'' = \frac{ds \cdot ds'}{(ds^2 \cdot \sin^2\alpha + ds'^2 \cdot \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

$$d\sigma'' = \frac{d\sigma \cdot d\sigma'}{(d\sigma^2 \cdot \sin^2\alpha + d\sigma'^2 \cdot \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzen wir

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma'}{ds'} = p,$$

so ist

$$\frac{d\sigma''}{ds''} = p^2 \cdot \frac{(ds^2 \cdot \sin^2\alpha + ds'^2 \cdot \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(d\sigma^2 \cdot \sin^2\alpha + d\sigma'^2 \cdot \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d\sigma''}{ds''} = p^2 \cdot \frac{1}{p} = p, \text{ d. h.}$$

Das Längenverhältnis ist in jeder Richtung dasselbe, wenn man die Orte P und Q festhält; es ändert sich erst, wenn die Orte sich ändern, wodurch φ und ψ_1 andere Werte erhalten, denn es war nach § 5:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1 - \varepsilon^2)} \cdot \frac{d\psi_1}{d\varphi}.$$

Zeichnet man alle Strahlen $\left(\frac{d\sigma''}{ds''}\right)$, von einem Punkte O ausgehend, wie es im § 4 ausführlich erklärt war, so sind dieselben alle $= p$, d. h.: *Bei der winkeltreuen Abbildung ist die Verzerrungsellipse ein Kreis.*

§ 9. Die im § 4 über die Indikatrix geführte Kontroverse war, wie sich jetzt zeigen wird, eine durchaus notwendige. Wir können uns nämlich in die durch Gauß herbeigeführte Fortsetzung unserer Untersuchung nicht eher vertiefen, als bis wir die Krümmung des Erdsphäroids studiert haben. Wir errichten dazu in einem beliebigen Punkte $P(\varphi)$ desselben die Normale PL und machen diese Normale zur Achse eines Ebenenbüschels. Jede Ebene durch PL wird das Rotationsellipsoid in einer Ellipse schneiden, wie im § 4 bewiesen worden ist. Konstruiert man von jeder dieser Ellipsen im Punkte P den Krümmungsradius M, dessen Bedeutung im 1. Kapitel § 9 erklärt worden ist und der gegeben war durch

$$M = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

so wird dieser Wert nur für den Krümmungsradius derjenigen Ellipse richtig sein, welche *die Meridianellipse* ist, nicht aber für die andern Ellipsen, da dieselben ja andere Werte für die Halbachsen als a und b, also auch ein anderes ε haben. Sobald wir aber bei a und ε nicht an die bisher immer gebrauchten *Bessel*schen Werte, sondern an beliebige, der jedesmaligen Schnittellipse eigentümliche, denken, gilt M als allgemeine Formel für den Krümmungsradius. Ist der Punkt P durch seine geographische Breite φ fest gegeben und zeichnen wir das M der Meridianellipse (I, § 9) als Strecke hin, desgleichen den Krümmungsradius aller übrigen Schnittellipsen unter demjenigen Winkel gegen den ersten Strahl geneigt, den die Schnittebene durch PL mit der Meridianebene bildet, so ist der Inbegriff der Endpunkte aller Strahlen ein Kegelschnitt, die Indikatrix (indicatrice de courbure). Die Mathematik zeigt, daß von allen Schnittellipsen die Meridianellipse E_m den kleinsten, die dazu senkrechte Schnittellipse E_p den größten Krümmungsradius hat; diesen letzteren müssen wir ermitteln. Legen wir zu diesem Zweck in P an die Erde die Tangente, welche senkrecht zum Meridian steht, so ist dieselbe nicht bloß Tangente an jene zur Meridianellipse senkrechte Schnittellipse E_p, sondern auch Tangente an den durch P gehenden Parallelkreis, da ja dieser im Punkte P ebenfalls senkrecht zum Meridian steht. Es berühren

sich also in P Parallelkreis und Schnittellipse E_p. Errichten wir in allen Punkten des Parallelkreises die Normalen PL auf dem Erdsphäroid und verlängern wir dieselben in das Innere der Erde hinein, so werden sich dieselben sämtlich in einem Punkte S der Erdachse schneiden müssen. Hat nämlich P die Koordinaten u und v, so ist die Gleichung der Normale (I, § 4, S. 8)

$$y - v = \frac{a^2 v}{b^2 u}(x - u).$$

Der Punkt P', der auf dem Parallelkreise dem Punkte P diametral gegenüberliegt, hat die Koordinaten

$$P'(-u, v),$$

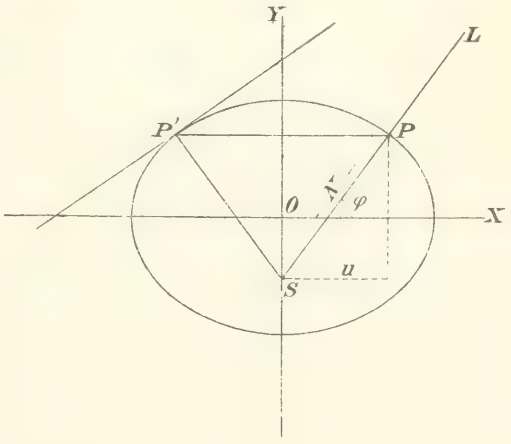
deshalb hat die Normale in P' die Gleichung

$$y - v = -\frac{a^2 v}{b^2 u}(x + u).$$

Die erstere schneidet die Y-Achse in einem Punkte S mit der Ordinate

$$y = v - \frac{a^2 \cdot v}{b^2} = -\varepsilon_1{}^2 \cdot v,$$

da $x = 0$ ist; die zweite, wie man sich sofort überzeugt, in demselben Punkte S. Was von P und P' gilt, behält seine Richtigkeit für alle Punkte des Parallelkreises, so daß dieser als die Grundfläche eines geraden Kreiskegels erscheint, der S zur Spitze hat. Die Seite PS desselben ist nun der gesuchte Krümmungshalbmesser der Schnittellipse E_p. Denn nach der Erklärung erhält man ihn, wenn zwei unendlich nahe Normalen der Schnittellipse E_p sich schneiden; dieselben sind aber identisch mit zwei unendlich nahen Kegelseiten PS, da ja die in P stattfindende Berührung von E_p mit dem Parallelkreise sich



Figur 11.

als ein Zusammenfließen in zwei unendlich nahen Punkten darstellt. Die Strecke $PS = N$ wird durch die Gleichung bestimmt (Fig. 11)

$$\cos\varphi = \frac{u}{N},$$

$$N = \frac{u}{\cos\varphi}$$

$$N = \frac{a}{(1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \text{ (I, § 4, S. 10).}$$

Man versteht unter dem *„mittleren Krümmungshalbmesser"* das geometrische Mittel zwischen M und N, also die Größe

$$A = \sqrt{MN};$$

demnach hier

$$A = \frac{a\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{(1 - \varepsilon^2 \cdot \sin^2\varphi)}.$$

Diese wird in der Fortführung unserer Untersuchung eine wichtige Rolle spielen.

§ 10. Wir gehen nämlich jetzt von der *Mollweideschen* Normalkugel K_n mit dem Radius a zu einer anderen Kugel K über, auf der wir die erstere *winkeltreu* abbilden wollen (Fig. 10), und von der sich zeigen wird, daß sie das soeben definierte A zum Halbmesser hat. Für die neue, die *Gauß*sche Kugel soll die Bedingung gelten:

$$\textit{geographische Kugellänge} = \alpha \cdot \textit{Ellipsoidlänge},$$

wo α eine Konstante bedeutet.

Die abzubildende Sphäroidzone sei von zwei Parallelkreisen begrenzt, für welche B_0 die Mittelbreite ist, welchem Werte auf der Normalkugel K_n die Breite ψ_0 und auf der definitiven *Gauß*schen Kugel K vom Radius r die Breite b_0 entspreche, so daß für einen beliebigen Punkt der Zone die Breite φ, die Normalkugelbreite ψ_1 und die Kugelbreite[1]) b der endgültigen Kugel K zusammengehörige Werte sind. Da jetzt Kugel auf Kugel abzubilden ist, so sieht das im § 5 aufgestellte Schema folgendermaßen aus:

$d\sigma = a \cdot d\psi_1$ (Meridianbögen), $d\sigma_1 = r \cdot db$,

$d\sigma' = a \cos\psi_1 \cdot d\lambda$ (Parallelkreisbögen), $d\sigma_1' = \alpha \cdot r \cos b \cdot d\lambda$.

1) Eine Verwechselung mit der Halbachse b des Erdsphäroids ist wohl nicht zu befürchten.

Wegen der Ähnlichkeit der Rechtecke verhält sich

$$d\sigma : d\sigma' = d\sigma_1 : d\sigma_1',$$

$$\frac{d\psi_1}{\cos\psi_1} = \frac{db}{\alpha \cdot \cos b},$$

also ist nach § 5:

$$\frac{\alpha \cdot \cos\psi_1 \cdot d\psi_1}{1+\sin\psi_1} + \frac{\alpha \cdot \cos\psi_1 \cdot d\psi_1}{1-\sin\psi_1} = \frac{\cos b\, db}{1+\sin b} + \frac{\cos b\, db}{1-\sin b},$$

oder integriert, mit $\ln k$ als der Integrationskonstanten:

$$\alpha \ln(1+\sin\psi_1) - \alpha\ln(1-\sin\psi_1) = \ln(1+\sin b) - \ln(1-\sin b) - \ln k,$$

d. h.

$$\alpha \ln \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right) = \ln \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{b}{2}\right) - \ln k.$$

Demnach

VII) $$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{b}{2}\right) = k \operatorname{tg}^\alpha\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right).$$

Führen wir hierin wieder φ ein, indem wir die Definition von ψ_1 durch die Gleichung V) berücksichtigen, so erhält man

VIII) $$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{b}{2}\right) = k \operatorname{tg}^\alpha\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right)^{\frac{\alpha\varepsilon}{2}}.$$

Es ist dies die von *Gauß* aufgestellte Formel; sie wird mit der von ihm angegebenen identisch, wenn man bedenkt, daß

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{b}{2}\right) = \cot\left(45^0 + \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{b}{2}\right)}$$

ist, so daß sich ergibt

VIIIa) $$\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{k} \operatorname{tg}^\alpha\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(\frac{1-\varepsilon\sin\varphi}{1+\varepsilon\sin\varphi}\right)^{\frac{\alpha\varepsilon}{2}}.$$

Soll die Abbildung *die günstigste* sein, so müssen wir die Werte von α, k und r passend zu bestimmen suchen.

Aus dem Schema des § 5 lesen wir für das Längen- oder Vergrößerungsverhältnis je zweier einander entsprechender Bogenelemente den Wert ab:

Meridianbogenelement-Verhältnis:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} \cdot d\psi_1}{(1-\varepsilon^2)\, d\varphi} = \frac{a \cdot d\psi_1}{M \cdot d\varphi};$$

Parallelkreisbogenelement-Verhältnis:

$$\frac{d\sigma'}{ds'} = \frac{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\psi_1}{\cos\varphi} = \frac{a \cdot \cos\psi_1}{N \cdot \cos\varphi}.$$

Aus dem soeben aufgestellten Schema, das die Beziehung zwischen der Normalkugel K_n und der definitiven Bildkugel K liefert, lesen wir ab:

$$\text{Meridianbogenelement-Verhältnis: } \frac{d\sigma_1}{d\sigma} = \frac{r \cdot db}{a \cdot d\psi_1};$$

$$\text{Parallelkreisbogenelement-Verhältnis: } \frac{d\sigma_1'}{d\sigma'} = \frac{\alpha \cdot r \cos b}{a \cdot \cos \psi_1}.$$

Die Multiplikation zusammengehöriger Verhältnisse liefert

$$\frac{\text{Meridianbogenelement der Bildkugel } K}{\text{Meridianbogenelement des Sphäroids}} = \frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{r \cdot db}{M \cdot d\varphi};$$

$$\frac{\text{Parallelkreisbogenelement der Bildkugel } K}{\text{Parallelkreisbogenelement des Sphäroids}} = \frac{d\sigma_1'}{ds'} = \frac{\alpha \cdot r \cdot \cos b}{N \cdot \cos \varphi}.$$

Auf Grund der für die winkeltreue Abbildung gegebenen Definition haben die vier zuerst niedergeschriebenen Verhältnisse sämtlich *denselben Wert*, also ist auch

$$\frac{d\sigma_1}{ds} = \frac{d\sigma_1'}{ds'} = m.$$

Demnach ist

$$m = \frac{r\,db}{M \cdot d\varphi}; \quad m = \frac{\alpha \cdot r \cdot \cos b}{N \cdot \cos \varphi};$$

folglich

$$\frac{db}{d\varphi} = \frac{M\alpha \cos b}{N \cos \varphi}.$$

Setzt man

$$\frac{N}{M} = V^2,$$

so ist

$$\frac{db}{d\varphi} = \frac{\alpha \cdot \cos b}{V^2 \cdot \cos \varphi}.$$

Nun war

$$M = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}; \quad N = \frac{a}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}};$$

daher

$$V^2 = \frac{(1-\varepsilon^2 \cdot \sin^2 \varphi)}{(1-\varepsilon^2)}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}{(1-\varepsilon^2)}$$

$$= 1 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$= 1 + \varepsilon_1^2 \cdot \cos^2 \varphi,$$

da

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$
$$1 - \varepsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}$$
$$\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \varepsilon_1{}^2$$

schon früher im 1. Kapitel gesetzt worden war. Zugleich erkennt man, daß

$$N = \frac{a}{V \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{1}{V},$$

und für

$$\frac{a^2}{b} = c$$
$$N = \frac{c}{V}$$

ist, daß folglich für m auch geschrieben werden kann:

$$m = \frac{\alpha r}{c} \cdot \frac{V \cos b}{\cos \varphi}.$$

Dieses Vergrößerungsverhältnis hat, wie wir am Schlusse des § 8 sahen, wenn P ein Punkt des Erdsphäroids, Q der entsprechende Punkt auf der Bildkugel K (Radius r) ist, für jedes Azimut denselben Wert; es ändert sich erst, wenn die Orte P und Q andere werden, also auch φ und b andere Werte annehmen.

Wir fassen deshalb auf dem Erdsphäroid einen Punkt P_0 ins Auge, der die *sphäroidische Normalbreite* B_0, die *sphäroidische Normallänge* L_0 hat. Die der Breite B_0 entsprechende Kugelbreite sei b_0. Bedeuten alsdann B und L die sphäroidischen oder *geographischen* Koordinaten, also Breite und Länge eines beliebigen Punktes P der Erdoberfläche, — b und l die entsprechenden sphärischen Koordinaten, Kugelbreite und Kugellänge des Bildpunktes Q auf der Bildkugel K, so ist

$$\varphi = B_0 + (B - B_0) = B_0 + p,$$
$$b = b_0 + (b - b_0) = b_0 + q.$$

Es stellen demnach p und q Breitendifferenzen vor, gerechnet von den Orten P_0 bezw. Q_0. Da unsere Festsetzung zugleich besagt, daß

$$\varphi = B$$

ist, so liegt zu gleicher Zeit ein Wechsel in der Bezeichnung vor. Derselbe geschieht in der Absicht, nach und nach alle diejenigen Zeichen einzuführen, die in der *Trigonometrischen Abteilung der königl. preußischen Landesaufnahme* im Gebrauch sind. Dieselben sind der Öffentlichkeit übergeben durch den ehemaligen Chef dieser Abteilung, *Generalleutnant Dr. Schreiber*, in der Schrift: *„Die konforme Doppelprojektion der Trigonometrischen Abteilung der kgl. preußischen Landesaufnahme.“* Formeln und Tafeln, 99 S. Berlin 1897, E. S. Mittler u. Sohn.[1]) Das Triangulierungsgebiet der Abteilung erstreckt sich von 47°26′ bis 55°54′ nördlicher Breite und von 23°30′ bis 40°33′ östlicher Länge von *Ferro*. Da der Parallelkreis 52°42′ (rund) als Normalparallelkreis, und der Meridian 31° als Hauptmeridian, also

$$L_0 = 31^0 \text{ östl. von Ferro},$$

gewählt ist, so entfernt sich das Gebiet südlich um 5°16′ und nördlich um 3°12′ vom Normalparallelkreis; es entfernt sich westlich um 540 km (bei Metz) und östlich um 622 km (bei Lyck) vom Hauptmeridian. Es umfaßt $8^1/_2$ Breiten- und 17 Längengrade. Dem mittleren Parallelkreis würde also eigentlich eine Breite von 51°40′ zukommen. Um jedoch den Anschluß an die grundlegenden Arbeiten von *Gauß:* „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“. 1. Abhandlung 1843, enthalten in Band IV von Carl Friedrich *Gauß' Werke*, Göttingen 1873, nicht zu verlieren, und in Erwägung, daß bei der im Jahre 1877 stattgehabten definitiven Einführung der neuen Berechnungsart bereits so viele Messungsergebnisse unter Benutzung der *Gauß*schen Tafel endgültig berechnet waren, daß es nicht mehr zweckmäßig erschien, zu einer andern Normalbreite überzugehen, hat man angenommen:

$$B_0 = 52^0 42' 2{,}5325'', \quad b_0 = 52^0 40'.$$

§ 11. Nachdem wir so die Vorstellung über das abzubildende Gebiet fixiert haben, gilt es *α, r und k gemäß den Gaußschen Festsetzungen zu bestimmen.* Wir schreiben für m:

1) Auch *v. Schmidt*, Oberstleutnant à la suite des Generalstabes, *Die Projektionsmethode der Trigonometrischen Abteilung der königl. preußischen Landesaufnahme*, Zeitschrift für Vermessungswesen, 1894, S. 385 ff., wurde zu Rate gezogen.

$$m = \frac{\alpha r V \cos(b_0 + q)}{c \cos(B_0 + p)}$$

und stellen an die Bildkugel K vom Radius r die Forderung, es soll an der Stelle B_0, L_0 bezw. b_0, $l = 0$,

$$m = 1$$

sein, d. h. es ist

1) $$m_{p=0} = 1 = \frac{\alpha r V_0 \cos b_0}{c \cos B_0},$$

wenn

$$V_0 = (1 + \varepsilon_1{}^2 \cos^2 B_0)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Es bedeutet dies die längentreue Abbildung der Umgebung der Stelle B_0, L_0. Im allgemeinen ist nun

$$m = f(B_0 + p) = f(\varphi).$$

Da p, wie wir soeben gesehen haben, höchstens $5^0 16'$ ist, also immerhin als eine kleine Größe gelten kann, so entwickeln wir m nach dem *Taylor*schen Satze und erhalten

$$m = f(B_0) + p \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_{p=0} + \frac{p^2}{2!}\left(\frac{d^2 m}{d\varphi^2}\right)_{p=0} + \frac{p^3}{3!}\left(\frac{d^3 m}{d\varphi^3}\right)_{p=0} + \cdots.$$

Um nun eine noch innigere Beziehung zwischen Sphäroid und Bildkugel herzustellen, setzt *Gauß* fest, es soll nicht bloß

1) $$m_{p=0} = f(B_0) = 1, \quad \text{also} \quad \log m_{p=0} = 0$$

sein, sondern es soll ferner sein:

2) $$\left(\frac{d \log m}{d\varphi}\right)_{p=0} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \left(\frac{dm}{d\varphi}\right)_{p=0} = 0,$$

3) $$\left(\frac{d^2 \log m}{d\varphi^2}\right)_{p=0} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \left(\frac{d^2 m}{d\varphi^2}\right)_{p=0} = 0,$$

so daß also das Vergrößerungsverhältnis für jeden Punkt der Sphäroid- oder der Kugelfläche nur um eine *Größe dritter Ordnung* von 1 abweicht, wenn man den Abstand p eines Punktes vom Normalparallelkreis B_0 als Größe erster Ordnung ansieht.

Es war

$$m = \frac{\alpha r}{c} \frac{\cos b}{\cos \varphi} V;$$

demnach ist

$$\log m = \log\left(\frac{\alpha r}{c}\right) + \log \cos b - \log \cos \varphi + \log V,$$

und daher

$$\frac{d \log m}{d\varphi} = \qquad - \operatorname{tg} b \frac{db}{d\varphi} + \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{d\varphi}.$$

Da, wie oben gezeigt,

$$\frac{db}{d\varphi} = \frac{\alpha \cos b}{V^2 \cdot \cos \varphi},$$

ferner

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon_1^2 \sin \varphi \cos \varphi}{V}$$

ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{d \log m}{d\varphi} &= -\operatorname{tg} b \frac{\alpha \cos b}{V^2 \cdot \cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi - \frac{\varepsilon_1^2 \sin \varphi \cos \varphi}{V^2} \\ &= \frac{-\alpha \sin b + V^2 \sin \varphi - \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}{V^2 \cdot \cos \varphi} \\ &= \frac{-\alpha \sin b + \sin \varphi (V^2 - \varepsilon_1^2 \cos^2 \varphi)}{V^2 \cdot \cos \varphi} \\ &= \frac{\sin \varphi - \alpha \sin b}{V^2 \cdot \cos \varphi}.\end{aligned}$$

Dies soll für $p = 0$, $q = 0$ verschwinden, also besteht die Gleichung

2) $$\sin B_0 = \alpha \sin b_0.$$

Wir bilden weiter

$$\frac{d^2 \log m}{d\varphi^2} = \frac{V^2 \cos^2 \varphi - \alpha V^2 \cos \varphi \cos b \frac{db}{d\varphi} - (\sin \varphi - \alpha \sin b)\left(2V \frac{dV}{d\varphi} \cos \varphi - V^2 \sin \varphi\right)}{V^4 \cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{1}{V^4 \cos^2 \varphi}\{V^2 \cos^2 \varphi - \alpha^2 \cos^2 b\} - \frac{(\sin \varphi - \alpha \sin b)\left(2 \frac{dV}{d\varphi} \cos \varphi - V \sin \varphi\right)}{V^3 \cos^2 \varphi}.$$

Setzen wir hier $p = 0$, $q = 0$ ein und beachten, daß der zweite Teil alsdann wegen der Gleichung 2) verschwindet, und daß das Ganze nach *Gauß* verschwinden soll, so ist

$$V_0^2 \cos^2 B_0 = \alpha^2 \cos^2 b_0,$$

$$(1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 B_0) \cos^2 B_0 = \alpha^2 \cos^2 b_0,$$

$$\varepsilon_1^2 \cdot \cos^4 B_0 = \alpha^2 - (\alpha^2 \sin^2 b_0 + \cos^2 B_0),$$

oder wegen 2)

$$\varepsilon_1^2 \cdot \cos^4 B_0 = \alpha^2 - (\sin^2 B_0 + \cos^2 B_0).$$

Demnach

3) $$\alpha^2 = 1 + \varepsilon_1^2 \cdot \cos^4 B_0,$$

oder aber auch, wenn man einfach die erste dieser Gleichungen radiziert:

$$\alpha = \frac{\cos B_0}{\cos b_0} \cdot V_0,$$

3′) $$\alpha = \frac{\cos B_0}{\cos b_0} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B_0}{1 - \varepsilon^2}}.$$

Nun war

1) $$1 = \frac{\alpha r V_0 \cos b_0}{c \cdot \cos B_0}.$$

Setzt man für α den Wert ein, so bestimmt sich r durch die Gleichung

$$1 = \frac{r V_0^2}{c},$$

$$r = \frac{c}{V_0^2} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)}{b(1-\varepsilon^2\sin^2 B_0)}.$$

Wegen

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

ist

4) $$r = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1-\varepsilon^2\sin^2 B_0)},$$

d. h. nach § 9

4′) $$r = A,$$

es ist *der Radius der Bildkugel gleich dem mittleren Krümmungshalbmesser des Erdsphäroids* an der Stelle P_0, welche die geographischen Koordinaten B_0, L_0 hat.

Man kann demnach für die Rechnung den folgenden Gang einschlagen. Man nehme auf dem Sphäroid eine Mittelbreite $(\varphi =) B_0$ beliebig an, berechne aus der Gleichung V b) das dazugehörige $(\psi_1 =) \psi_0$ der Normalkugel K_n, darauf α nach 3), jetzt die Breite b_0 der Bildkugel K nach 2), alsdann den Radius A derselben nach 4) und endlich k nach der aus VII) zu bildenden Gleichung:

$$k = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{b_0}{2}\right) \cdot \operatorname{cot}^\alpha\left(45^0 - \frac{\psi_0}{2}\right).$$

Um diese Rechnungen bequemer anstellen zu können, hat *Gauß* empfohlen, Hilfswinkel einzuführen. Er setzt

1* $$\sin\chi = \varepsilon$$

$$\log\sin\chi = \log\varepsilon$$

$$= 8{,}912\,205\,2118 - 10$$

$$\chi = 4^0\,41'\,9{,}981''.$$

Es folgt daraus weiter

$$\varepsilon_1^2 = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\sin^2\chi}{\cos^2\chi}$$

$$= \operatorname{tg}^2\chi.$$

Daher

3) $$\alpha^2 = 1 + \varepsilon_1{}^2 \cos^4 B_0,$$

$$\alpha^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \chi \cdot \cos^4 B_0.$$

Gauß setzt

2* $$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} \chi \cdot \cos^2 B_0.$$

Demnach ist

$$\alpha^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \xi$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \xi}$$

3″) $$\alpha = \frac{1}{\cos \xi}.$$

Also

2) $$\sin b_0 = \cos \xi \cdot \sin B_0.$$

Ferner ist der Radius der *Gauß*schen Kugel

4) $$A = \frac{a \cos \chi}{(1 - \sin^2 \chi \sin^2 B_0)}.$$

Gauß setzt

3* $$\sin \theta = \sin \chi \sin B_0,$$

alsdann ist

4″) $$A = \frac{a \cos \chi}{\cos^2 \theta}.$$

Damit ist der Weg, der einzuschlagen ist, genügend charakterisiert, und doch sind wir noch nicht am Ziel. *Gauß* zog es nämlich vor, statt von einem gegebenen Werte des B_0 von einem solchen von b_0 auszugehen. Er wählte auf der Bildkugel die Normalbreite

$$b_0 = 52^0\ 40'.$$

Es ist demnach jetzt noch zu zeigen, wie man *umgekehrt* von einem gegebenen b_0 zu dem zugehörigen B_0 gelangt; es gilt vor allem ξ *als Funktion von* b_0, statt wie in Gleichung 2* von B_0 zu ermitteln.

Es war

2*) $$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} \chi \cdot \cos^2 B_0$$

$$= \operatorname{tg} \chi \cdot (1 - \sin^2 B_0).$$

Nun ist nach 2)

2) $$\sin B_0 = a \sin b_0$$

und nach 3″)

$$\alpha = \frac{1}{\cos \xi},$$

daher ist

$$\operatorname{tg} \xi = \operatorname{tg} \chi \left(1 - \frac{\sin^2 b_0}{\cos^2 \xi}\right)$$

$$\frac{\sin \xi}{\cos \xi} = \frac{\sin \chi}{\cos \chi}\left(1 - \frac{\sin^2 b_0}{\cos^2 \xi}\right)$$

$$\sin \xi \cos \xi \cos \chi = \sin \chi \cos^2 \xi - \sin \chi \sin^2 b_0$$

$$\sin \chi \sin^2 b_0 = \sin \chi \cos^2 \xi - \sin \xi \cos \xi \cos \chi .$$

Multipliziert man beide Seiten mit 2 und zieht man sie von $\sin \chi$ ab, so ist

$$\sin \chi (1 - 2 \sin^2 b_0) = \sin \chi (1 - 2 \cos^2 \xi) + 2 \sin \xi \cos \xi \cos \chi$$

$$\sin \chi \cdot \cos 2 b_0 = - \sin \chi \cdot \cos 2 \xi + \sin 2 \xi \cdot \cos \chi$$

$$\sin \chi \cdot \cos 2 b_0 = \sin (2 \xi - \chi) .$$

Demnach ergibt sich ξ aus der Gleichung

4*) $$\sin (2 \xi - \chi) = \varepsilon \cdot \cos 2 b_0 .$$

Jetzt kann man wieder der Reihe nach α, B_0, A, k berechnen. Treten wir also wirklich in die Berechnung der Fundamentalgrößen der *Gauß*schen Kugel ein, so ist auf Grund der Formel 4* anzusetzen:

$$\log \varepsilon = 8{,}912\,2052 - 10$$

$$\log \cos 74^0\,40' = 9{,}422\,3176 - 10$$

$$\log \sin (\chi - 2\xi) = 8{,}334\,5228 - 10$$

$$\chi - 2\xi = 1^0\,14'\,16{,}375'',$$

aber

$$\chi = 4^0\,41'\,9{,}981'' \text{ (genau } 4^0\,41'\,9{,}9862''),$$

daher

$$\xi = 1^0\,43'\,26{,}803'' \text{ } (1^0\,43'\,26{,}804\,02'').$$

Ferner

$$\log \left(\frac{1}{\alpha}\right) = \log \cos \xi$$

$$= 9{,}999\,8033 - 10$$

$$\frac{1}{\alpha} = 0{,}999\,547\,26 \text{ } (0{,}999\,547\,287)$$

$$\log \alpha = 0{,}000\,196\,6762$$

$$\alpha = 1{,}000\,452\,93 \text{ } (1{,}000\,452\,918\,118).$$

Nach 2) ist

$$\sin B_0 = \frac{\sin b_0}{\cos \xi},$$

daher

$$\log \sin B_0 = 9{,}900\,6298 - 10,$$
$$B_0 = 52^0\,42'\,2{,}56''\ (52^0\,42'\,2{,}532\,51'').$$

Nach 3* ist

$$\sin\,\theta = \sin\chi \sin B_0,$$

daher

$$\log \sin\theta = 8{,}812\,8350,$$
$$\theta = 3^0\,43'\,34{,}247''.$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung von A über. Nach 4'') ist

$$\log a = 6{,}804\,643\,464$$
$$\log\cos\chi = 9{,}998\,545\,797 - 10$$
$$\log(a\cos\chi) = 16{,}803\,189\,261 - 10$$
$$-\log\cos^2\theta = -\,9{,}998\,161\,896 \mp 10$$
$$\log A = 6{,}805\,027\,365\ (6{,}805\,027\,4003)$$
$$A = 6\,383\,038{,}24\ \text{m}\ (6\,383\,037{,}564\ \text{m})$$

ist der Radius der *Gauß*schen Kugel groß.

Wir gehen jetzt zur Berechnung von k über. Nach der Formel Vb) ist ψ_0 gegeben durch

$$\psi_0 = B_0 - 690{,}258''\sin 2B_0 + 0{,}957\,14''\sin 4B_0,$$
$$\psi_0 = 52^0\,42'\,2{,}5325'' - 690{,}258''\cdot\sin 74^0\,35'\,54{,}935''$$
$$- 0{,}957\,14''\cdot\sin 30^0\,48'\,10{,}13'',$$
$$\psi_0 = 52^0\,42'\,2{,}5325'' - 665{,}4702'' - 0{,}4901'',$$
$$\psi_0 = 52^0\,42'\,2{,}5325'' - 11'\,5{,}9603'',$$
$$\psi_0 = 52^0\,30'\,56{,}5722''.$$

Demnach ist

$$k = \cot^\alpha\left(45^0 - \tfrac{\psi_0}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(45^0 - \tfrac{b_0}{2}\right),$$
$$k = \cot^\alpha 18^0\,44'\,31{,}7139''\cdot\operatorname{tg}\,18^0\,40',$$
$$\log k = \alpha\log\cot 18^0\,44' \cdots + \log\operatorname{tg}\,18^0\,40',$$
$$\log k = 0{,}998\,3286 - 1\ (0{,}998\,329\,1195 - 1),$$
$$\log\left(\tfrac{1}{k}\right) = 0{,}001\,6714\ (0{,}001\,670\,8804),$$
$$k = 0{,}996\,16,$$
$$\tfrac{1}{k} = 1{,}003\,8547.$$

Die eingeklammerten Zahlen geben die genauen, teils von *Gauß* selbst berechneten, Werte an; man hat sie unter Anwendung von 10- bis 15-stelligen Logarithmen erhalten. Man erkennt, daß bei Anwendung von nur 7-stelligen Logarithmen sich eine für das praktische Bedürfnis völlig ausreichende Übereinstimmung mit den genauen Werten ergibt, sind doch die Winkel erst in der zweiten Dezimalstelle der Sekunden mit einer gewissen Unsicherheit behaftet.

§ 12. Nachdem so die Fundamentalgrößen der *Gaußschen* Bildkugel festgelegt sind, gilt es noch zu zeigen, wie der Übergang von dem Erdsphäroid zur Bildkugel bezw. der Übergang von dieser zum Rotationsellipsoid *im allgemeinen* vollzogen wird.

Kennt man die geographische Breite[1])

$$\varphi = B = B_0 + p$$

und die geographische Länge

$$L$$

eines beliebigen Ortes auf dem Erdsphäroid, zählt man die Längen positiv nach Osten vom *Meridian von Ferro* an, ist demnach

$$L_0 = 31^0$$

die sphäroidische Länge des *Hauptmeridians*, dem auf der Kugel auch ein Hauptmeridian $l = 0$ entspricht, so ist *allgemein die Kugellänge* l gezählt von diesem letzteren

$$l = \alpha(L - L_0),$$

und es ist *die Kugelbreite*

$$b = b_0 + q$$

gegeben durch

VII) $$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{b_0 + q}{2}\right) = k \operatorname{tg}^\alpha\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right),$$

wo ψ_1, da es eine Funktion des gegebenen Wertes φ, sich vorher durch die Gleichung Vb) (§ 7) in der einfachsten Weise ausrechnen läßt.

Etwas schwieriger zu lösen ist die umgekehrte Aufgabe, wenn *die sphärischen Koordinaten* b und l, also Kugelbreite und

1) Wegen der Methoden zu ihrer Bestimmung vergl. *P. Güßfeldt*, Grundzüge der astron.-geogr. Ortsbestimmung. Braunschweig 1902. Vieweg u. Sohn.

Kugellänge, auf der *Gaußschen Kugel* gegeben sind. Wir ermitteln zuerst

$$L = L_0 + \frac{l}{\alpha},$$

und jetzt B mit Hilfe des Zwischenwertes ψ_1. Offenbar ist durch

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right) = \left\{\frac{1}{k}\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{b}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

der Winkel ψ_1 gegeben. Aus ihm ist nach Formel V) die geographische Breite $\varphi = B$ folgendermaßen zu bestimmen.

Es ist

$$\text{V)} \qquad \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B}{2}\right) \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon \sin B}{1 - \varepsilon \sin B}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right).$$

Man setze

$$\sin \mu = \varepsilon \sin B,$$

so ist

$$\frac{1 + \varepsilon \sin B}{1 - \varepsilon \sin B} = \frac{1 + \sin \mu}{1 - \sin \mu}$$

$$= \cot^2\left(45^0 - \frac{\mu}{2}\right). \qquad \text{(vergl. § 5.)}$$

Daher

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B}{2}\right) \cdot \cot^{\varepsilon}\left(45^0 - \frac{\mu}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right),$$

oder

$$\text{Vc)} \qquad \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}^{\varepsilon}\left(45^0 - \frac{\mu}{2}\right).$$

Aus dieser Gleichung wird B sehr einfach *mit Hilfe eines Iterationsverfahrens gewonnen.* Wäre nämlich $\varepsilon = 0$, so wäre auch $\mu = 0$, folglich alsdann $B = \psi_1$. Man berechne daher μ' aus

$$\sin \mu' = \varepsilon \sin \psi_1,$$

setze es in Vc) ein, so entsteht ein Näherungswert B', der gegeben ist durch

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B'}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}^{\varepsilon}\left(45^0 - \frac{\mu'}{2}\right).$$

Nach Feststellung von B' setze man

$$\sin \mu'' = \varepsilon \sin B'$$

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B''}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\psi_1}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}^{\varepsilon}\left(45^0 - \frac{\mu''}{2}\right),$$

und fahre so fort. Zur Erläuterung diene das folgende Beispiel. Wieder sei

$$b = 52^0\,40',$$

so ist

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \tfrac{\psi_1}{2}\right) = \left\{\tfrac{1}{k}\operatorname{tg} 18^0\,40'\right\}^{\frac{1}{\alpha}};$$

$$\log\operatorname{tg}\left(45^0 - \tfrac{\psi_1}{2}\right) = \tfrac{1}{\alpha}\{\log\operatorname{tg} 18^0\,40' - \log k\},$$

$$= 9{,}530\,5853 - 10,$$

$$45^0 - \tfrac{\psi_1}{2} = 18^0\,44'\,31{,}68'',$$

$$\psi_1 = 52^0\,30'\,56{,}64'';$$

es ist dies demnach der im vorigen Paragraphen als ψ_0 bezeichnete Winkel. Weiter ist

$$\sin\mu' = \varepsilon \sin 52^0\,30'\,56{,}64''$$

$$\mu' = 3^0\,43'\,1{,}141''.$$

Daher

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B'}{2}\right) = \operatorname{tg} 18^0\,44'\,31{,}68'' \cdot \operatorname{tg}^{\varepsilon} 43^0\,8'\,29{,}43'',$$

$$\log\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B'}{2}\right) = \log\operatorname{tg} 18^0\,44'\,31{,}68'' + \varepsilon \cdot \log\operatorname{tg} 43^0\,8'\,29{,}43''.$$

Sei

$$-z = \varepsilon \log\operatorname{tg} 43^0\,8'\,29{,}43''$$

$$= \varepsilon\,(9{,}971\,805\,99 - 10)$$

$$= -\varepsilon \cdot 0{,}028\,194$$

$$z = \varepsilon \cdot 0{,}028\,194$$

$$\log z = \log\varepsilon + \log 0{,}028\,194$$

$$= 0{,}362\,361\,99 - 3$$

$$z = 0{,}002\,3034$$

$$\log\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B'}{2}\right) = \log\operatorname{tg} 18^0\,44'\,31{,}68'' - 0{,}002\,3034$$

$$= 9{,}528\,2819 - 10$$

$$45^0 - \frac{B'}{2} = 18^0\,38'\,59{,}51''$$

$$B' = 52^0\,42'\,0{,}98''\ \text{(1. Näherungswert für } B\text{)}.$$

Weiter ist

$$\sin\mu'' = \varepsilon \sin 52^0\,42'\,1'',$$

$$\mu'' = 3^0\,43'\,34{,}17''.$$

Demnach ist anzusetzen:

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B''}{2}\right) = \operatorname{tg}\, 18^0\, 44'\, 31{,}68'' \cdot \operatorname{tg}^{\varepsilon}\, 43^0\, 8'\, 12{,}915'',$$

$$\log \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B''}{2}\right) = \log \operatorname{tg}\, 18^0\, 44'\, 31{,}68'' + \varepsilon \cdot \log \operatorname{tg}\, 43^0\, 8'\, 12{,}915''.$$

Sei

$$\begin{aligned} -z &= \varepsilon \cdot \log \operatorname{tg}\, 43^0\, 8'\, 12{,}915'' \\ &= \varepsilon\,(9{,}971\,7363 - 10) \\ &= -\varepsilon \cdot 0{,}028\,2637 \\ z &= \varepsilon \cdot 0{,}028\,2637; \\ \log z &= \log \varepsilon + \log 0{,}028\,2637 \\ &= 0{,}363\,434\,14 - 3, \\ z &= 0{,}002\,3090. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{B''}{2}\right) &= \log \operatorname{tg}\, 18^0\, 44'\, 31{,}68'' - 0{,}002\,3090 \\ &= 9{,}528\,2763 - 10 \\ 45^0 - \frac{B''}{2} &= 18^0\, 38'\, 58{,}71'' \\ B'' &= 52^0\, 42'\, 2{,}58'' \quad \text{(2. Näherungswert für } B\text{)}. \end{aligned}$$

Der richtige Wert ist

$$B = 52^0\, 42'\, 2{,}532\,515\,6381'',$$

welchen genaueren Wert eine 7-stellige Logarithmentafel natürlich nicht leisten kann.

Gauß hat seinen „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie“ eine Tafel der B beigegeben, die unter Annahme eines gegebenen b den Wert von B auf fünf Dezimalen für die Sekunden angibt; sie erstreckt sich von $b = 46^0\, 40'$ bis $b = 58^0\, 40'$. *Schreiber*, Die konforme Doppelprojektion, Formeln und Tafeln, gibt $(B - b)$ für $b = 44^0\, 20$ bis $b = 61^0$ und zwar ebenfalls die Sekunden mit einer Genauigkeit von fünf Dezimalen. Wir geben aus der Tafel I dieser Publikation den nachstehenden *Auszug*. Einen solchen aus der *Gauß*schen Tafel findet man auch in *J. Dienger*, Abbildung krummer Oberflächen aufeinander und Anwendung derselben auf höhere Geodäsie. Braunschweig 1858, Friedr. Vieweg und Sohn, desgleichen in *Jordans* Werk, Bd. III, 4. Aufl. 1896, Anhang S. [60]—[61].

Wir geben durch den folgenden Auszug einen Einblick in die *Gauß*sche Tafel.

b	$B-b$	b	$B-b$	b	$B-b$
44° 20′	1′ 3,96 572″	50° 30′	1′ 51,47 338″	56° 30′	2′ 15,12 648″
44° 30′	5,56 352″	51°	54,28 270″	57°	16,12 995″
45°	10,25 250″	51° 30′	56,93 723″	57° 30′	16,98 961″
45° 30′	14,78 466″	52°	59,43 754″	58°	17,70 677″
46°	19,15 982″	52° 30′	2′ 1,78 428″	58° 30′	18,28 280″
46° 30′	23,37 787″	52° 40′	2,53 252″	59°	18,71 913″
47°	27,43 875″	53°	3,97 814″	59° 30′	19,01 726″
47° 30′	31,34 249″	53° 30′	6,01 989″	60°	19,17 872″
48°	35,08 915″	54°	7,91 036″	60° 20′	19,21 124″
48° 30′	38,67 888″	54° 30′	9,65 042″	61° 21′	19,21 129″
49°	42,11 187″	55°	11,24 102″	60° 22′	19,21 120″
49° 30′	45,38 839″	55° 30′	12,68 318″	60° 30′	19,20 514″
50°	48,50 876″	56°	13,97 795″	61°	19,09 817″

Diese Tabelle zeigt uns, daß die größte Differenz zwischen geographischer (sphäroidischer) und *Gaußscher Kugel*-Breite für

$$B(=\varphi) = 60^\circ 23' 19{,}21129'' \quad \text{und} \quad b = 60^\circ 21'$$

stattfindet. Wir stellen die Maximaldifferenzen des Vergleichs wegen zusammen:

Abbildung durch *reduzierte* Breiten (Du Séjour) : 5′ 45,326″;
„ „ *geozentrische* „ : 11′ 30,66 ″;
winkeltreue Abbildung auf der *Mollweideschen Kugel* : 11′ 30,261″;
„ „ „ der *Gaußschen Kugel* : 2′ 19,21129″.

Die von *Gauß* für die Triangulierung des ehemaligen Königreiches Hannover in den Jahren 1821—1825 ersonnene konforme Projektion des Erdsphäroids auf die Kugel erweist sich demnach als eine geniale Ausgestaltung des *Mollweide*schen Gedankens.

Wir geben zum Schluß noch einen Einblick in den Aufbau der Gaußschen Tafel, wie ihn *Gauß* in den Art. 6 und 8 seiner „Untersuchungen“ lehrt, da das mehr *elementare* im Eingang

gelehrte Iterationsverfahren höheren Ansprüchen an Genauigkeit in betreff der Sekunden nicht zu entsprechen vermag.

Aus der Formel VIII) des § 10 geht unzweifelhaft hervor, daß b eine Funktion von φ, d. h. der sphäroidischen Breite B ist. Demnach ist auch umgekehrt:

$$B = f(b)$$
$$B = f\{b_0 + (b - b_0)\}.$$

Nach dem *Taylor*schen Satze ist

$$f(x) = f(b_0) + (x - b_0) f'(b_0) + \frac{(x-b_0)^2}{2!} f''(b_0) + \frac{(x-b_0)^3}{3!} f'''(b_0) + \cdots.$$

Setzt man also

$$x = b, \quad f(b_0) = B_0,$$

so ist

$$B = f(b) = B_0 + (b - b_0) f'(b_0) + \frac{(b-b_0)^2}{2!} f''(b_0) + \frac{(b-b_0)^3}{3!} f'''(b_0) + \cdots,$$

welche Reihe in betreff ihrer Konvergenz kleine Werte von $(b - b_0)$ voraussetzt. Da $b_0 = 52^0\,40'$ ist, das Triangulierungsgebiet des Deutschen Reiches sich nach Norden bis $55^0\,54'$ erstreckt, nach Süden hin bis $47^0\,26'$, so schwankt die fragliche Differenz zwischen

$$+ 3^0\,12' \quad \text{und} \quad - 5^0\,16'.$$

Die Erfahrung zeigt, daß es genügt, die ersten vier Glieder dieser Reihe festzustellen; wir beschränken uns auf die Berechnung von nur dreien, wodurch die Methode völlig klar gemacht wird.

Das *erste* Glied ist uns bekannt, es ist

$$B_0 = 52^0\,42'\,2{,}53252''.$$

Das *zweite* Glied ist

$$f'(b_0) = \left(\frac{df(b)}{db}\right)_{b=b_0}$$
$$= \left(\frac{dB}{db}\right)_{b=b_0}.$$

Nun hatten wir im § 10 bei der Berechnung des Vergrößerungs- oder Längenverhältnisses m bereits gefunden (S. 100):

$$\frac{db}{d\varphi} = \frac{db}{dB} = \frac{\alpha \cos b}{V^2 \cos B},$$

wo

$$V^2 = 1 + \varepsilon_1{}^2 \cos^2 B.$$

Demnach ist

$$\left(\frac{dB}{db}\right)_{b=b_0} = \frac{V_0^2 \cos B_0}{\alpha \cos b_0}.$$

Es hatte aber die *Gaußsche* Forderung $\left(\frac{d^2 \log m}{d\varphi^2}\right)_{b_0} = 0$ ergeben (§ 11)

$$V_0 \cos B_0 = \alpha \cos b_0.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} f'(b_0) &= \left(\frac{dB}{db}\right)_{b=b_0} \\ &= V_0 \\ &= (1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 B_0)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da diese Größe offenbar *größer als Eins* ist, so setzen wir

$$\begin{aligned} V_0 &= (1 + \varepsilon_1^2 \cos^2 B_0)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 \sin^2 B_0}{1 - \varepsilon^2}} \\ &= 1 + A_1. \end{aligned}$$

Alsdann ist

$$B = B_0 + (b - b_0)(1 + A_1) + \frac{(b - b_0)^2}{2!} f''(b_0) + \cdots$$

oder

$$B - b = B_0 - b_0 + A_1 (b - b_0) + A_2 (b - b_0)^2 + \cdots.$$

Wir leisten jetzt noch die Bestimmung von A_2. Es ist

$$f'(b) = \frac{dB}{db} = \frac{V^2 \cos B}{\alpha \cos b},$$

daher

$$\begin{aligned} f''(b) &= \frac{d}{db}\left(\frac{V^2 \cos B}{\alpha \cos b}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2 \cos^2 b}\left\{\alpha \cos b \left(2V \cos B \frac{dV}{db} - V^2 \sin B \frac{dB}{db}\right) + \alpha V^2 \cos B \sin b\right\}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$2V \frac{dV}{db} = -2\varepsilon_1^2 \cos B \cdot \sin B \cdot \frac{dB}{db},$$

demnach

$$\begin{aligned} f''(b) &= \frac{1}{\alpha \cos^2 b}\left\{-(1 + 3\varepsilon_1^2 \cos^2 B) \cos b \sin B \frac{dB}{db} + V^2 \cos B \sin b\right\} \\ &= \frac{V^2}{\alpha \cos^2 b}\left\{-(1 + 3\varepsilon_1^2 \cos^2 B) \frac{\sin B \cos B}{\alpha} + \cos B \sin b\right\} \\ &= \frac{V^2 \cos B}{\alpha^2 \cos^2 b}\left\{\alpha \sin b - \sin B - 3\varepsilon_1^2 \sin B \cos^2 B\right\}. \end{aligned}$$

Daraus leiten wir ab:

$$A_2 = \frac{1}{2!} f''(b_0)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{V_0^2 \cos B_0}{\alpha^2 \cos^2 b_0} \{\alpha \sin b_0 - \sin B_0 - 3\varepsilon_1^2 \sin B_0 \cos^2 B_0\}.$$

Infolge der *Gauß*schen Forderungen war

$$\sin B_0 = \alpha \sin b_0, \qquad V_0^2 \cos^2 B_0 = \alpha^2 \cos^2 b_0,$$

daher ist

$$A_2 = -\frac{3}{2} \varepsilon_1^2 \cdot \sin B_0 \cdot \cos B_0$$

$$= -\frac{3}{2} \varepsilon_1^2 \frac{\alpha^2 \sin b_0 \cos b_0}{V_0}$$

$$= -\frac{3}{4} \varepsilon_1^2 \alpha^2 \frac{\sin (2 b_0)}{V_0},$$

wo V_0 nach § 11 sich bestimmt aus

$$V_0 = \sqrt{\frac{c}{A}}.$$

Demnach ist endlich

IX) $$B - b = B_0 - b_0 + (V_0 - 1)(b - b_0) - \frac{3}{4} \varepsilon_1^2 \alpha^2 \frac{\sin (2 b_0)}{V_0} (b - b_0)^2 + \cdots.$$

Die Differenzen $B - b$, $B_0 - b_0$ und $b - b_0$ sind hier natürlich in analytischem Maß gemessen. Da der Maßzahl 2π ein Winkel von 360^0 entspricht, so wird der Einheit ein Winkel von $\frac{180^0}{\pi}$ entsprechen. Die Multiplikation jedes Gliedes mit $\frac{180}{\pi}$ wird demnach bewirken, daß Winkelgrade sich rechts und links gegenüberstehen. Wünscht man, daß links und im ersten Gliede rechts *Sekunden* stehen, die übrigen Glieder rechts aber *Minuten* angeben, so wird man unsere Reihe schreiben müssen:

$$(B - b) \frac{180}{\pi} \cdot 3600'' = (B_0 - b_0) \frac{180}{\pi} \cdot 3600'' + (V_0 - 1) \cdot 60 \left\{ (b - b_0) \frac{180}{\pi} \cdot 60' \right\}$$

$$- \frac{3}{4} \varepsilon_1^2 \alpha^2 \frac{\sin (2 b_0)}{V_0} \cdot \frac{\pi}{180} \left\{ (b - b_0) \frac{180}{\pi} \cdot 60' \right\}^2$$

$$+ A_3 \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \cdot \frac{1}{60} \left\{ (b - b_0) \frac{180}{\pi} \cdot 60' \right\}^3 + \cdots.$$

Nun ist bekanntlich infolge der von *Gauß* getroffenen Wahl:

$$(B_0 - b_0) \frac{180}{\pi} \cdot 3600'' = 122{,}53252''.$$

Ersetzt man die linke Seite einfach durch $B - b$, das jetzt *Sekunden* angibt, und desgleichen jede geschweifte Klammer

rechts durch $b - b_0$, das jetzt in *Minuten* gegeben ist, so ergibt sich, wenn man für die Koeffizienten ihre Zahlenwerte einsetzt, nach *Schreiber* (S. 15)

IX a) $$B - b = 122{,}53252'' + 73{,}97535\left(\frac{b - b_0}{1000}\right) - 84{,}7958\left(\frac{b - b_0}{1000}\right)^2 + 4{,}6419\left(\frac{b - b_0}{1000}\right)^3 + \cdots$$

($B - b$ in Sekunden, $b - b_0$ in Minuten gerechnet.)

Differenziert man die rechte Seite dieser Gleichung nach b und setzt man den erhaltenen Ausdruck gleich *Null*, so erhält man, wie dies bereits früher auseinandergesetzt worden ist, denjenigen Winkel b, für welchen der Maximalwert der Differenz $(B - b)$ eintritt. Es ergibt sich, wenn man bei $(b - b_0)^3$ abbricht, eine quadradische Gleichung mit der Lösung

$$b - b_0 = 461',$$

d. h. es ist

$$b = 60^0\,21'.$$

Nach diesen Vorbereitungen ist es ein leichtes, *umgekehrt* $b - b_0$ als Funktion von $B - B_0$ darzustellen, und damit die Formel VIII) durch eine Reihenentwickelung zu ersetzen. Sei auf Grund dieser Formel

$$b = F(B),$$

also

$$b_0 = F(B_0),$$

so ist

$$b = F(B_0 + (B - B_0)),$$

$$b = b_0 + F'(B_0)\cdot(B - B_0) + \frac{F''(B_0)}{2!}(B - B_0)^2 + \frac{F'''(B_0)}{3!}(B - B_0)^3 + \cdots.$$

Es ist

$$F'(B) = \frac{db}{dB} = \frac{\alpha \cos b}{V^2 \cos B},$$

daher

$$F'(B_0) = \frac{1}{V_0},$$

wie vorher auseinandergesetzt wurde.

Es ist

$$F''(B) = \frac{d^2 b}{dB^2} = \frac{d}{dB}\left(\frac{\alpha \cos b}{V^2 \cos b}\right),$$

woraus sich ergibt

$$F''(B_0) = \frac{\varepsilon_1^{\,2}}{V_0^{\,3}} \cdot \frac{(1 + 2V_0)\sin 2B_0}{2}.$$

Setzt man dies ein, wandelt man das analytische in Winkelmaß um durch Multiplikation mit $\frac{180}{\pi}$, und rechnet man links nach *Sekunden*, rechts aber nach *Graden*, wozu Glied für Glied mit 3600 zu multiplizieren ist, so erhält man nach *Gauß* (Werke Bd. 4, S. 269):

$$\text{X)}\quad b - b_0 = 359\,556{,}69447\left(\frac{B - B_0}{100}\right) + 3041{,}38652\left(\frac{B - B_0}{100}\right)^2 - 946{,}26056\left(\frac{B - B_0}{100}\right)^3 \mp \cdots.$$

Dr. *Schreiber* gibt auf S. 16 eine andere Formel, zu deren Herleitung die *Lagrange*schen Entwickelungen in § 6 offenbar benutzt worden sind.

§ 13. Es gilt nun zum Schluß dem Vergrößerungs- oder Längenverhältnis m noch einige Worte zu widmen. Bereits im § 11 hatten wir, ausgehend von

$$m = f(B_0 + p),$$

m in eine Potenzreihe entwickelt; es war

$$m = f(B_0) + (B - B_0)\left(\frac{dm}{dB}\right)_{B=B_0} + \frac{(B - B_0)^2}{2!}\left(\frac{d^2m}{dB^2}\right)_{B=B_0} + \frac{(B - B_0)^3}{3!}\left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_{B=B_0} + \frac{(B - B_0)^4}{4!}\left(\frac{d^4m}{dB^4}\right)_{B=B_0} + \cdots.$$

Die *Gauß*schen Forderungen an die Bildkugel K hatten das zweite und dritte Glied dieser Reihe zum Verschwinden gebracht, so daß also

$$m = \frac{\alpha A}{c}\,\frac{\cos b}{\cos B}\,V$$

sich darstellt als

$$m = 1 + \frac{(B - B_0)^3}{3!}\left(\frac{d^3m}{dB^3}\right)_{B=B_0} + \frac{(B - B_0)^4}{4!}\left(\frac{d^4m}{dB^4}\right)_{B=B_0} + \cdots.$$

m ist demnach für Orte des Erdsphäroids, die eine erhebliche Entfernung vom Normalparallelkreis haben, *von Eins verschieden*. *Gauß* hat durch Berechnung einer Tafel für die Werte von $\log m$ auch hierin einen Einblick gegeben; wir lassen einen Auszug aus dieser Tafel folgen.

B	log m	B	log m
47°	+ 0,000 000 89	52°	— 0,000 000 00
48°	50	52° 30′	00
49°	24	53°	00
50°	09	53° 30′	00
51°	02	54°	01
51° 30′	01	55°	06
52°	+ 00	56°	— 19

Für die Zone 51° 30′ bis 54°, die eine Breite von rund 275 km hat (Kap. I, § 12), geht, wie man sieht, log m nicht über 0,000 000 01, also m wenig über Eins, hinaus; man kann hier geradezu von *Längentreue* sprechen. Will man diesen Vorteil auch anderen Zonen zukommen lassen, so muß man die *Mollweide*sche Normalkugel K_n auf einer *Gaußschen* Bildkugel K abbilden, deren Hauptpunkt statt der Kugelbreite $b_0 = 52° 40′$ einen geeigneteren Wert hat. Bis jetzt existiert neben der *Gaußschen* Tafel nur eine einzige für den Normalparallelkreis $b_0 = 46° 36′$, die von *Marek* und *Horsky* für die Österreichisch-Ungarische Monarchie berechnet worden ist. Auch ihr liegen die Besselschen Erddimensionen zu Grunde; sie ist niedergelegt in *Marek*, Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, *Budapest* 1875; eine Besprechung derselben von *Jordan* findet sich in der „Zeitschrift für Vermessungswesen“ 1877, S. 40—46.

Es kann nicht zweifelhaft sein, daß das, was das Genie eines *Gauß* einst für *Hannover* ersonnen, in der Zukunft seinen Siegeszug über die ganze zivilisierte Welt antreten wird. Schon sind die Geographen in eine Diskussion über die Herstellung einer Weltkarte im Maßstabe 1 : 1 000 000 eingetreten (vergl. *Siegmund Günther*, Geophysik I, mit seinen reichen Literaturangaben); diese Frage wird nicht mehr von der Bildfläche verschwinden. Einen Schritt weiter, und Landesvermessung mit dazu gehöriger Triangulierung werden auch in anderen Ländern dazu führen, jene großartige Aufgabe in Angriff zu nehmen, wodurch *das Deutsche Reich* allen voranleuchtet, die Herstellung von Meßtischblättern und Generalstabskarten. Wie in Deutschland dieses Unternehmen organisiert ist, und welche wichtige Stelle dabei

der trigonometrischen Abteilung des Generalstabes zukommt, wolle man in der kleinen Schrift von *Kahle*, Landesaufnahme und Generalstabskarten, Berlin 1893, nachlesen. Würde Deutschland für das gedachte weltumspannende Unternehmen als Muster zu gelten haben, so ist es in diesem selbst doch nur *eine* Stelle unter den vielen. Hr. *E. Hammer* gibt in seiner schon oft zitierten Schrift: Zur Abbildung des Erdellipsoids, Stuttgart 1891, K. Wittwer, 40 S., durch eine Tafel (S. 28—29) einen Einblick in die Werte von B_0, b_0, $\log\left(\frac{1}{k}\right)$, $\log A$, die man erhält, wenn man, wie unbedingt nötig, einen anderen Parallelkreis als *Gauß* wählt, und damit auf eine in ihren Dimensionen von der *Gauß*schen verschiedene Bildkugel K projiziert; dabei nimmt Hr. *Hammer* den Exponenten α als das gegebene an und ordnet nach steigendem Werte desselben; nachstehend ein Auszug aus dessen Tafel.

α	B_0	b_0	$\log\left(\frac{1}{k}\right)$	$\log A$
1,000 000	90° 0′ 0,00″	90° 0′ 0,00″	—	6,806 0976
3	80° 2′ 43,92″	80° 2′ 40,41″	0,002 8152	0104
5	78° 40′ 21,76″	78° 40′ 16,67″	7886	6,805 9851
1,000 010	76° 29′ 32,27″	76° 29′ 23,64″	7373	9385
30	72° 5′ 49,70″	72° 5′ 30,56″	6067	8220
50	69° 33′ 24,30″	69° 32′ 56,67″	5178	7419
1,000 100	65° 27′ 26,98″	65° 26′ 41,77″	3464	5945
200	60° 23′ 54,51″	60° 22′ 41,92″	1001	3862
250	58° 30′ 46,19″	58° 29′ 22,01″	0,001 9997	3023
300	56° 51′ 40,37″	56° 50′ 5,63″	9090	2264
400	54° 1′ 27,66″	53° 59′ 27,59″	7245	0918
500	51° 35′ 59,04″	51° 33′ 49,04″	6063	6,804 9732
750	46° 34′ 21,79″	46° 31′ 38,53″	3027	7208
1,001 000	42° 22′ 37,88″	42° 19′ 29,96″	0667	5081
1 250	38° 38′ 9,14″	38° 34′ 43,39″	0,000 8618	3208
1 500	35° 9′ 23,03″	35° 5′ 45,52″	6855	1514
1 750	31° 49′ 2,64″	31° 45′ 19,15″	5327	6,803 9957
2 000	28° 31′ 31,54″	28° 27′ 47,83″	4003	8508
2 500	21° 42′ 34,89″	21° 39′ 10,15″	1898	5861
3 000	13° 28′ 42,09″	13° 26′ 14,23″	0482	3468
1,003 353 98	0° 0′ 0,00″	0° 0′ 0,00″	0000	1893

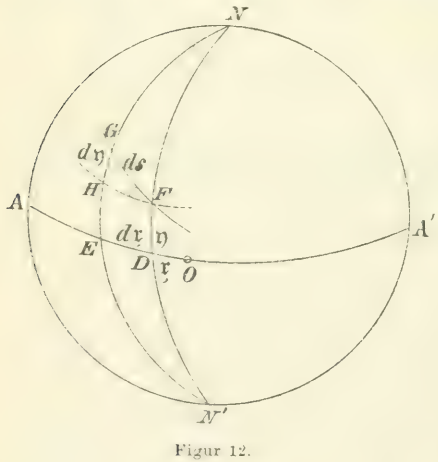
§ 14. Nachdem die Abbildung des Erdsphäroids auf der *Gauß*schen Kugel, der mathematisch schwierigste Teil der Untersuchung, ausführlich dargelegt ist, wollen wir zuerst Zweck und Ziel des Folgenden erörtern.

Seitdem durch *Schreiber* und *Wittstein* die *Gauß*sche konforme Doppelprojektion 1866 der Öffentlichkeit übergeben worden ist, gilt es als die erste Aufgabe, möglichst viele trigonometrische Punkte durch ihre geographischen Koordinaten, geographische Länge und Breite, festzulegen. Diese Größen, unsere L und B, werden im *Deutschen Reiche* von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme veröffentlicht; ihre Umrechnung auf die l und b der *Gauß*schen Kugel ist uns jetzt geläufig. Nachdem *Preußen* vorangegangen ist, teilt man die abzubildende Fläche des Deutschen Reiches in die im 1. Kapitel § 17 erwähnten sphäroidischen Trapeze von entweder 6′ geographischer Breite und 10′ geographischer Länge, *das Meßtischblatt*, oder 15′ geographischer Breite und 30′ geographischer Länge, *die Generalstabskarte*. Ein solches trapezartiges Viereck wird zuerst *konform* auf die *Gauß*sche Kugel und von dieser *konform* durch die sogenannte *Mercatorsche Projektion* auf die Ebene übertragen. Es handelt sich also um *eine konforme Doppelprojektion*, die man auch *eine Polyederprojektion* genannt hat, da, wenn man das Erdsphäroid im Maßstabe 1 : 25 000 herstellen und auf diesem die vorher genannten sphäroidischen Maschen von 6′ geographischer Breite und 10′ geographischer Länge durch ihr Bild, nämlich das ebene Meßtischblatt, ersetzen würde, alsdann ein Polyeder entsteht. Daraus geht sofort hervor, daß man aus Meßtischblättern oder Generalstabskarten, die auf dem Sphäroid aneinander grenzen, *wenn man sie mit ihren Rändern aneinander heftet*, *keine zusammenhängende ebene Karte* herstellen kann. Zwischen zwei Blättern, die man in der Ebene ausbreitet, besteht eine Klaffe oder Lücke, die, zwar gering, doch eben vorhanden ist; freilich macht sich dies für wenige Blätter, die zonen- oder bandenweise zusammengelegt werden, nicht sehr bemerkbar.

Wir müssen also zunächst zeigen, wie man das Bild des Sphäroids von der *Gauß*schen Kugel konform oder winkeltreu *auf die Ebene* überträgt. Da dies mit Hilfe der *Mercatorschen*

Projektion erfolgt, so müssen wir uns zuerst mit dieser beschäftigen.[1])

Diese von dem berühmten deutschen Geographen *Gerhard Mercator* — er hieß eigentlich *Gerhard Cremer*, war 1512 in Rupelmonde in Holland von deutschen Eltern geboren und starb 1594 in Duisburg a. Rh., woselbst ihm ein Denkmal gesetzt ist — aus dem Jahre 1569 herrührende Projektion gehört zu den zylindrischen, indem man sich um die abzubildende Kugel einen Zylinder längs des Äquators gelegt denkt. Der *Aquator* wird also *längentreu* abgebildet. Die Fig. 12 stelle die *Gauß*sche Bildkugel dar mit dem Nordpol N, dem Südpol N' und dem Äquator AOA'. Alle Meridiane schneiden AA' rechtwinklig; die Bögen NDN' und NEN' mögen zwei Meridiane darstellen. Machen wir den Äquator zur Abscissenachse, den durch den Punkt O gehenden Meridian zur Ordinatenachse, so hat der Punkt F die *sphärischen rechtwinkligen Koordinaten* ξ und η, nämlich $OD = \xi$ und $DF = \eta$, in *Metern* gemessen. Die Ordinate η ist demnach der senkrechte Abstand des Punktes F vom Äquator, die Abscisse ξ der Abstand des Fußpunktes dieses Perpendikels von dem im Äquator willkürlich gewählten Anfangspunkt O. G sei ein zweiter Punkt der Kugelfläche mit den rechtwinkligen sphärischen Koordinaten ξ' und η'. Wir denken uns die Punkte F und G durch einen Großkreisbogen FG[2]) verbunden, ziehen durch F den Parallelkreis FH und nehmen an, das sphärische Dreieck FGH sei *unendlich klein*. Dann ist



Figur 12.

$$DE = d\xi, \quad GH = d\eta; \quad FG = dS.$$

1) Nach der zeichnenden Seite geschieht das in *Müller und Presler*, Leitfaden der Projektionslehre. Leipzig, Teubner 1903. (Ausgabe A, S. 277.)

2) In Figur 12 lese man $FG = dS$, statt ds.

Ist A der Radius der *Gauß*schen Kugel, so ist

$$\sphericalangle DNE = \frac{1}{A}\, d\mathfrak{x},$$

im Bogen- oder analytischen Maß gemessen. Ist r' der Radius des Parallelkreises, von dem FH ein Bogenelement ist, so ist r' gegeben durch

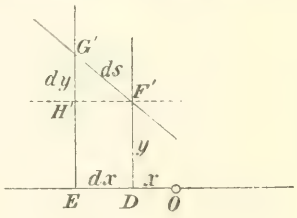
$$r' = A \cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right),$$

wo $\frac{\mathfrak{y}}{A}$ das den $\mathfrak{y}$ Metern entsprechende Bogenmaß ist. Ferner ist

$$FH = \frac{r'}{A} \cdot d\mathfrak{x},$$
$$= d\mathfrak{x} \cdot \cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right).$$

Es sei das unendlich kleine sphärische Dreieck FGH in Fig. 13 durch das *ihm ähnliche* rechtwinklige, ebene Differentialdreieck $F'G'H'$ abgebildet, und es habe der Bildpunkt F' die Koordinaten x, y, in Metern gemessen, der Bildpunkt G' die Koordinaten $x + dx$, $y + dy$; endlich sei

$$F'G' = ds.$$



Figur 13.

Das Abbildungsprinzip der *Winkeltreue* oder *Konformität* verlangt *Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen*, deshalb verhält sich

$$\frac{F'G'}{FG} = \frac{F'H'}{FH} = \frac{H'G'}{HG},$$

oder

$$\frac{ds}{dS} = \frac{dx}{d\mathfrak{x} \cdot \cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)} = \frac{dy}{d\mathfrak{y}}.$$

Da der Äquator *längentreu* abgebildet werden sollte, so ist

$$\mathfrak{x} = x.$$

Bezeichnet man das Vergrößerungs- oder Längenverhältnis mit m, so ist

$$m = \frac{ds}{dS} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)}.$$

Ferner ist

$$\frac{dy}{A} = \frac{1}{A} \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)},$$

oder

$$\frac{dy}{A} = \frac{d\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)}{\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)}.$$

Nun ist nach § 5:

$$\frac{1}{\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)}{1+\sin\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)} + \frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)}{1-\sin\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)};$$

also erhält man durch Integration, die auf natürliche Logarithmen führt,

$$\begin{aligned}\frac{y}{A} &= \int \frac{d\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)}{\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)} + C,\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\sin\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1-\sin\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)\right) + C,\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)}{1-\sin\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)}\right) + C.\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}1 \pm \sin\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right) &= \left\{\sin^2\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right) + \cos^2\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)\right\} \pm 2\sin\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)\\ &= \left\{\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right) \pm \sin\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)\right\}^2\\ &= \cos^2\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)\cdot\left\{1 \pm \operatorname{tg}\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)\right\}^2.\end{aligned}$$

Setzt man dies ein, so erhält man

$$\frac{y}{A} = \ln\left(\frac{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)}\right) + C.$$

Da für $\mathfrak{y} = 0$ auch $y = 0$ ist, so ist

$$y = A\cdot\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)}\right)$$

oder endlich

XI) $$y = A\cdot\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathfrak{y}}{2A}\right).$$

Will man y bequem und genau berechnen, so entwickele man es in eine nach Potenzen von $\frac{\eta}{2A}$ fortschreitende Reihe. Es ist

$$\left(1 - \operatorname{tg}\left(\tfrac{\eta}{2A}\right)\right)^{-1} = 1 + \operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2A} + \operatorname{tg}^2\tfrac{\eta}{2A} + \operatorname{tg}^3\tfrac{\eta}{2A} + \cdots$$

Demnach

$$\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\eta}{2A}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\eta}{2A}} = \left(1 + \operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2A}\right)\left(1 + \operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2A} + \operatorname{tg}^2\tfrac{\eta}{2A} + \operatorname{tg}^3\tfrac{\eta}{2A} + \cdots\right),$$

$$= 1 + 2\operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2A} + 2\operatorname{tg}^2\tfrac{\eta}{2A} + 2\operatorname{tg}^3\tfrac{\eta}{2A} + \cdots.$$

Folglich ist

$$\ln \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\eta}{2A}\right) = \ln\left(\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\eta}{2A}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\eta}{2A}}\right),$$

$$= \ln\left(1 + 2\operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2A} + 2\operatorname{tg}^2\tfrac{\eta}{2A} + 2\operatorname{tg}^3\tfrac{\eta}{2A} + \cdots\right),$$

$$= 2\operatorname{tg}\tfrac{\eta}{2A} + \tfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3\tfrac{\eta}{2A} + \tfrac{2}{5}\operatorname{tg}^5\tfrac{\eta}{2A} + \tfrac{2}{7}\operatorname{tg}^7\tfrac{\eta}{2A} + \cdots.$$

Denn da bekanntlich

$$\ln(1 + \xi) = +\xi - \tfrac{\xi^2}{2} + \tfrac{\xi^3}{3} - \tfrac{\xi^4}{4} + \tfrac{\xi^5}{5} - \cdots$$

ist, so geht daraus für

$$\xi = 2u + 2u^2 + 2u^3 + 2u^4 + \cdots$$

hervor

$$\begin{aligned}
\ln(1 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + 2u^4 + \cdots) = \\
2u + 2u^2 + 2u^3 + 2u^4 + 2u^5 + 2u^6 + 2u^7 + \cdots \\
- 2u^2 - 4u^3 - 6u^4 - 8u^5 - 10u^6 - 12u^7 - \cdots \\
+ \tfrac{8}{3}u^3 + 8u^4 + 16u^5 + \tfrac{80}{3}u^6 + 40u^7 + \cdots \\
- 4u^4 - 16u^5 - 40u^6 - 80u^7 - \cdots \\
+ \tfrac{32}{5}u^5 + 32u^6 + 96u^7 + \cdots \\
- \tfrac{32}{3}u^6 - 64u^7 - \cdots \\
+ \tfrac{128}{7}u^7 + \cdots \\
\hline
= 2u + \tfrac{2}{3}u^3 + \tfrac{2}{5}u^5 + \tfrac{2}{7}u^7 \cdots,
\end{aligned}$$

wie es soeben behauptet war.

Nun ist weiter, wie bekannt[1]),

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} \pm \cdots.$$

Deshalb ist

$$\frac{1}{\cos u} = \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} \pm \cdots\right)^{-1}$$
$$= 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{5}{4!}u^4 + \frac{61}{6!}u^6 \cdots.$$

Demnach ist

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}$$
$$= \left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} \mp \cdots\right)\left(1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{5u^4}{4!} + \frac{61}{6!}u^6 + \cdots\right)$$
$$= u + \frac{u^2}{3} + \frac{2}{15}u^5 + \frac{17}{315}u^7 + \cdots.$$

Wenden wir dies an, so ist

XI) $$y = A \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathfrak{y}}{2A}\right)$$

XIa) $$y = \mathfrak{y} + \frac{\mathfrak{y}^3}{6A^2} + \frac{\mathfrak{y}^5}{24A^4} + \frac{61\mathfrak{y}^7}{5040A^6} + \cdots.$$

Endlich ist das Vergrößerungsverhältnis m gegeben durch

$$m = \frac{1}{\cos\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)}$$

XII) $$m = 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^2 + \frac{5}{4!}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^4 + \frac{61}{6!}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^6 + \cdots.$$

Wir sind am Ziel. Man erkennt aus dem Werte von y, daß alle Parallelen zur $\mathfrak{x}$-Achse, für welche doch $\mathfrak{y} =$ constans ist, auch im Bilde Parallelen zur x-Achse sind. Da unserer Annahme nach die $\mathfrak{x}$-Achse der Äquator ist, so werden demnach alle Parallelkreise sich auch im Bilde als dem Äquator parallele Geraden darstellen. Desgleichen werden wegen $\mathfrak{x} = x$ alle Meridiane, für die doch $\mathfrak{x} =$ constans ist, auch im Bilde als parallele Geraden wiedergegeben werden.

Zum Schluß wollen wir noch einer kritischen Bemerkung Raum geben.

Führt man die Funktion secans ein, bekanntlich der umgekehrte Wert vom cosinus, so ist

$$\frac{dy}{A} = \sec\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right) \cdot d\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right).$$

1) Man vergl. z. B. *Haentzschel*, Elementare Herleitung der *Newton*schen Reihen, Berlin, Weidmann (Heyfelder), 1901.

Offenbar stehen rechts und links *unendlich kleine Größen*, die man *summieren* muß, um y zu erhalten, d. h. man hat eine Summation von unendlich vielen, aber unendlich kleinen Größen, also eine *Integration* auszuführen. Dabei ist eine *Grundbedingung* die, daß die Summanden ihrem Werte nach *eine stetige Folge* bilden, d. h. daß sie sich nur *um unendlich wenig voneinander unterscheiden*. Irgend ein mit dem Geiste der höheren Mathematik wenig vertrauter Autor hat geglaubt, unsere letzte Gleichung dadurch *elementarisieren* zu können, daß er dieselbe schreibt:

$$\frac{y}{A} = \sec 1' + \sec 2' + \sec 3' + \sec 4' + \cdots$$

und nun behauptet, *die höhere Analysis* wäre imstande zu zeigen, daß die rechte Seite

$$= \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\eta}{2A}\right)$$

sei. Es ist dies auf jeden Fall *falsch*, da

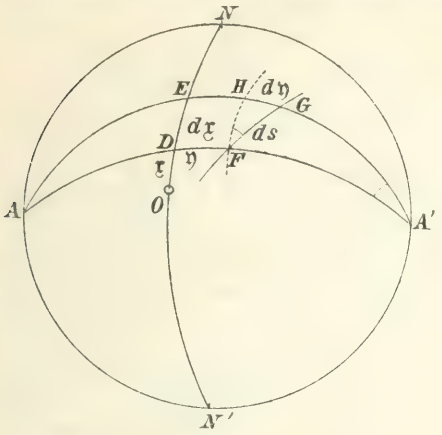
$$\sec 1' + \sec 2' + \sec 3' + \sec 4' + \cdots$$

eine Summe darstellt, deren Summanden ihrem Werte nach *eine diskontinuierliche oder unstetige Folge* bilden, womit die höhere Analysis, im besonderen die Lehre vom Integral, nicht bloß nichts zu tun hat, nein, was sie ganz besonders von der Betrachtung ausschließt. Es ist zu bedauern, daß die genannte falsche Behauptung Eingang in die Lehrbücher gefunden hat; ich nenne die elementare kleine Kartenkunde der *Göschen*-Bibliothek (Nr. 30) und auch *Zöppritz-Bludau*, der an solchen Stellen, wie ich schon oben behauptet habe, den bündigen Beweis dafür erbringt, daß ein tieferes Verständnis der *winkeltreuen* oder *konformen* Abbildungsarten ohne Kenntnis der *Elemente der Differential- und Integralrechnung* in dem geringen Umfange, wie sie hier verlangt werden, einfach unmöglich ist. Und doch will ich nicht verschweigen, daß der einfachste der konformen Entwürfe, *Mercators Projektion*, in elementarer Weise dem Verständnis zugänglich gemacht werden kann. Es ist das Verdienst von Herrn *Holzmüller*, der sich seit 1888 um diese Aufgabe bemüht hat, sie endlich einwandfrei, freilich auf einem längeren Wege, wie man es bei solchen *Elementarisierungen* immer beobachten kann, gelöst zu haben; man findet sie im 1. und 2. Bande seines großen vierbändigen Werkes über *Stereometrie*

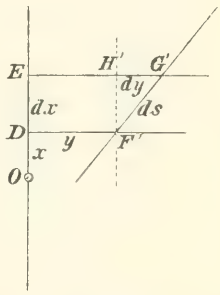
(Leipzig, Göschen, 1900—1902). Herr *Holzmüller* wäre vielleicht schneller zum Ziele gelangt, wenn er eine Bemerkung bei *Breusing*, Das Verebnen der Kugeloberfläche, Leipzig, 1892, beachtet hätte, wonach der von ihm eingeschlagene Weg schon von dem berühmten Astronomen *Halley* beschritten worden ist. Es ist mir zwar nicht möglich gewesen, diese Notiz nachzuprüfen, und es liegt mir fern, hiermit etwa die Priorität oder gar das Verdienst von Herrn *Holzmüller* um diese Aufgabe antasten zu wollen. Im Gegenteil; ich benutze diese Gelegenheit, um zu betonen, daß literarische Notizen und bloße Hinweise auf Schriften und Bücher, die nicht mehr allgemein zugänglich, wertlos sind. Wenn aber gar in wissenschaftlichen *Lehrbüchern*, statt den Sachverhalt darzustellen, auf solche verwiesen wird, so erscheint dies recht bedenklich; bei den winkeltreuen Entwürfen zeigt sich z. B. bei *Zöppritz-Bludau* diese Schwäche, wo im Anfang *Grunert*, Loxodromische Trigonometrie später *Littrow*, Chorographie, zitiert sind, welche Bücher heute nicht mehr als genügend verbreitet gelten können; vielleicht gibt diese Kritik, die kein Tadel sein soll, den Anlaß, daß in dem zuletzt genannten Lehrbuche in einer neuen Auflage nun auch die winkeltreuen Entwürfe eine wissenschaftliche Darstellung finden.

§ 15. Wir kehren jetzt zu unserer ursprünglichen Aufgabe zurück und zeigen, wie *Mercators Projektion in einem erweiterten Rahmen* bei der Herstellung der Generalstabskarten und der Meßtischblätter Anwendung findet. Offenbar kann man statt des Äquators der *Gauß*schen *Kugel* jeden beliebigen anderen Großkreis, also auch einen Meridian zur ξ-Achse machen; wir haben dazu nur das Koordinatensystem um 90^0 zu drehen, wie unsere Figuren 14 und 15 dies darstellen; ein Punkt wird so durch seine *Soldner*schen Koordinaten definiert. *In dem analytischen Aufbau der Formeln ändert sich dadurch gar nichts.* Freilich wird sich jetzt nur der Hauptmeridian der Karte — er befindet sich 31^0 östl. von Ferro — als eine gerade Linie darstellen; die übrigen Meridiane werden einen Winkel mit demselben bilden, den man die *Meridiankonvergenz* nennt. Desgleichen werden sich als gerade Linien alle diejenigen *kleinen Kugelkreise* darstellen, die für das Bild des Hauptmeridians auf der *Gauß-*

schen Kugel, also $l = 0$, die *Parallelkreise* sind. Dies sind natürlich infolge unserer Festsetzung nicht Parallelkreise im geographischen Sinne; im Gegenteil es sind auf den Karten *von*



Figur 14.



Figur 15.

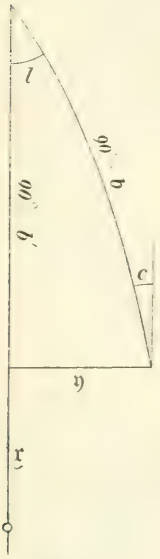
Norden nach Süden verlaufende gerade Linien. Ziehen wir also durch die Mitte eines Kartenblattes — Meßtischblatt oder Generalstabskarte — eine solche von Norden nach Süden gehende Gerade (x-Achse), so ist *die Meridiankonvergenz* c im Punkte p der Winkel, den der durch diesen Punkt gehende Meridian mit der durch denselben gezogenen Parallelen zur x-Achse bildet; dieser Winkel wird gezählt von der positiven x-Richtung im Sinne der kürzesten Drehungsrichtung in die positive y-Richtung.

Es seien gegeben B und L als die sphäroidische (geographische) Breite und Länge eines Punktes P der Sphäroidfläche, alsdann sind uns nach dem früheren bekannt b und l als die Kugelbreite und Kugellänge des dem Punkte P entsprechenden Punktes $\mathfrak{P}$ der Kugelfläche. Wir bestimmen zunächst ξ, η als die jetzt *im Winkelmaß* gegebenen sphärischen rechtwinkligen Koordinaten dieses Punktes $\mathfrak{P}$[1]). Es sei c die Meridiankonvergenz[2]) im Punkte P oder $\mathfrak{P}$ oder p, welches der dem Punkte $\mathfrak{P}$ entsprechende Punkt der Bildebene sei, der die rechtwinkligen Koordinaten x, y hat; sei b' die Kugelbreite des Fußpunktes der Ordinate η, so lehrt

1) In Figur 14 lese man $FG = dS$, statt ds.

2) Eine Verwechselung mit dem früheren $c = \frac{a^2}{b}$ ist wohl ausgeschlossen.

die Figur 16 die Richtigkeit der folgenden Gleichungen auf Grund der bekannten Formeln aus der Trigonometrie des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks:



Figur 16.

$$\operatorname{tg} b' = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos l},$$

$$\xi = b' - 52^0\,40',$$

$$\sin \eta = \cos b \cdot \sin l,$$

$$\operatorname{tg} c = \sin b \cdot \operatorname{tg} l.$$

Nachdem so ξ und η im *Winkelmaß* gefunden sind, gilt es noch die ebenen Koordinaten x und y in *Metern* anzugeben. Nach dem vorigen Paragraphen sind die Abscissen x und ξ an Länge gleich, sie werden beide nach Norden positiv gezählt, aber x ist in *Metern*, ξ jetzt im *Winkelmaß* oder in *Sekunden* ausgedrückt. Nun ist doch der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Maßen der folgende. Ist β ein Bogen eines Kreises vom Radius A Meter, ω der zugehörige Zentriwinkel in Sekunden gezählt, so verhält sich

$$\beta : 2\pi A = \omega'' : 360 \cdot 60 \cdot 60''$$

$$\beta = A \cdot \frac{2\pi\omega''}{360 \cdot 60 \cdot 60''} \text{ Meter.}$$

Setzt man

$$\varrho = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60''}{2\pi}$$

$$\varrho = 206\,264{,}806\,247''$$

$$\log \varrho = 5{,}314\,425\,1332,$$

so ist

$$\beta = A \cdot \frac{\omega''}{\varrho''} \text{ Meter.}$$

Zu ω'' gehört demnach $\frac{\omega''}{\varrho''}$ als das analytische Bogen-Maß; β gibt den zu ω'' gehörigen Bogen in Metern an. Ist umgekehrt ein Bogen β in Metern gegeben, so ist $\frac{\beta}{A}$ sein analytisches Maß und es ist $\beta \cdot \frac{\varrho}{A}$ die Anzahl von Sekunden desjenigen Zentriwinkels, der zum Bogen β auf dem Kreise vom Radius A Metern gehört. Nehmen wir, dem Radius der *Gaußschen Kugel* entsprechend,

$$A = 6\,383\,037{,}564 \text{ m}$$
$$\log A = 6{,}805\,027\,4003,$$

so ist

$$\frac{A}{\varrho} = 30{,}945\,839\,3828$$
$$\log \frac{A}{\varrho} = 1{,}490\,602\,2671$$
$$\frac{\varrho}{A} = 0{,}032\,314\,5218$$
$$\log \frac{\varrho}{A} = 0{,}509\,397\,7329 - 2.$$

Es stehen also x Meter mit $\mathfrak{x}$ Sekunden in der Beziehung

XIII) $$x = \frac{A}{\varrho}\,\mathfrak{x} \text{ (Meter)}.$$

Ferner ist y nach § 14, XIa), S. 126 gegeben durch

$$y = A\left\{\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^5 + \frac{61}{5040}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^7 + \cdots\right\} \text{ (Meter)}.$$

Hier ist $\mathfrak{y}$ noch in Metern gemessen, so daß sich also Meter und Meter gegenüberstehen. Soll jetzt aber $\mathfrak{y}$ in Sekunden gegeben sein, so muß man das analytische Maß $\frac{\mathfrak{y}}{A}$ noch mit ϱ multiplizieren, um Sekunden zu erhalten. Wir schreiben daher

$$\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\mathfrak{y}\varrho}{A}\right) \quad \text{statt} \quad \frac{\mathfrak{y}}{A}$$

und setzen nachträglich

$$\text{wieder } \mathfrak{y} \text{ statt } \left(\frac{\mathfrak{y}\varrho}{A}\right),$$

so daß jetzt $\mathfrak{y}$ die Bedeutung von Sekunden hat. Dann ist

XIV) $$y = A\left\{\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}\right)^5 + \frac{61}{5040}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}\right)^7 + \cdots\right\}.$$

Setzt man

$$\eta = \frac{\varrho}{A}\,y,$$

so ist

XIVa) $$y = \frac{A}{\varrho}\,\eta$$

und

XIVb) $$\eta = \mathfrak{y} + \mathfrak{A}_3\mathfrak{y}^3 + \mathfrak{A}_5\mathfrak{y}^5 + \mathfrak{A}_7\mathfrak{y}^7 + \cdots,$$

wo

$$\mathfrak{A}_3 = \frac{1}{6\varrho^2} \quad ; \quad \log \mathfrak{A}_3 = 0{,}592\,998\,4833 - 12$$

$$\mathfrak{A}_5 = \frac{1}{24\varrho^4} \quad ; \quad \log \mathfrak{A}_5 = 0{,}362\,088\,2256 - 23$$

$$\mathfrak{A}_7 = \frac{61}{5040\,\varrho^6}; \quad \log \mathfrak{A}_7 = 0{,}196\,3485 \qquad - 34$$

$\mathfrak{y}$ und η in Sekunden, y in Metern gemessen.

Generalleutnant Dr. *Schreiber* gibt l. c. auf S. 86—87 je eine Tafel für die Verwandlung von Metern in Kugelsekunden und von Kugelsekunden in Meter.

Ferner war das Vergrößerungsverhältnis

$$m = 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^2 + \frac{5}{4!}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^4 + \frac{61}{6!}\left(\frac{\mathfrak{y}}{A}\right)^6 + \cdots$$

$\mathfrak{y}$ und A in Metern.

Setzen wir auch diese Größe in das neue $\mathfrak{y}$ um, so ist

$$m = 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}\right)^2 + \frac{5}{4!}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}\right)^4 + \frac{61}{6!}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}\right)^6 + \cdots$$

$\mathfrak{y}$ in Sekunden.

Kehrt man die Gleichung

$$\frac{y}{A} = \frac{\mathfrak{y}}{\varrho} + \frac{1}{6}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}\right)^5 + \cdots$$

um, so erhält man in erster Näherung

$$\frac{\mathfrak{y}}{\varrho} = \left(\frac{y}{A}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{y}{A}\right)^3,$$

oder

$$\mathfrak{y} = \eta_i - \left(\frac{1}{6\varrho^2}\right)\eta_i^3;$$

allgemein ist

XV) $$\mathfrak{y} = \eta_i - \mathfrak{A}_3\eta_i^3 + \mathfrak{A}_5\eta_i^5 - \mathfrak{A}_7\eta^7 \pm \cdots.$$

Setzt man den Näherungswert von $\frac{\mathfrak{y}}{\varrho}$ in m ein, so ist

$$m = 1 + \frac{1}{2!}\left\{\left(\frac{y}{A}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{y}{A}\right)^3\right\}^2 + \frac{5}{4!}\left\{\left(\frac{y}{A}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{y}{A}\right)^3\right\}^4 - \cdots,$$

XVI) $$m = 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{y}{A}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{y}{A}\right)^4 + \cdots.$$

Daher ist der natürliche Logarithmus von m:

$$\ln m = \ln\left(1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{y}{A}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{y}{A}\right)^4 \cdots\right)$$

$$= \left\{\frac{1}{2!}\left(\frac{y}{A}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{y}{A}\right)^4 \cdots\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2!}\left(\frac{y}{A}\right)^2 \cdots\right\}^2 + \cdots$$

$$\ln m = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{A}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{y}{A}\right)^4 \cdots$$

A und y in Metern.

Bekanntlich hängen künstlicher und natürlicher Logarithmus durch die Gleichung zusammen

$$\log z = \mu \ln z,$$

$$\text{Modul } \mu = 0{,}434\,294\,4819; \quad \log \mu = 0{,}637\,7843 - 1.$$

Demnach ist

$$\log m = \frac{\mu}{2}\left(\frac{y}{A}\right)^2 - \frac{\mu}{12}\left(\frac{y}{A}\right)^4,$$

oder

XVII)
$$\log m = \frac{\mu}{2A^2} \cdot y^2 - \frac{\mu}{12A^4} \cdot y^4,$$

wo

$$\log \frac{\mu}{2A^2} = 0{,}726\,6995 - 15,$$

$$\log \frac{\mu}{12A^4} = 0{,}338\,4935 - 29$$

ist.

Da das Gebiet der Landesaufnahme des Deutschen Reiches sich vom Hauptmeridian östlich um 622 km (Lyck), westlich um 540 km (Metz) entfernt, so steigt bei einem $y = 600$ km der Wert von $\log m$ bis auf 0,002 an, demnach m selbst bis auf 1,0046, oder es kommen 4,6 mm Verzerrung auf 1 m, so daß also an den Grenzen im Osten und Westen des Reiches die Verzerrungsverhältnisse auf den Karten erheblich sind. Doch die Großartigkeit des Ganzen und der innere Zusammenhang zwischen seinen Teilen läßt leicht über diese nur für große Ordinaten y vorhandene Schwäche hinwegsehen.

§ 16. Wollen wir uns nach allen diesen theoretischen Auseinandersetzungen ein Bild von der Konstruktion einer Generalstabskarte oder eines Meßtischblattes machen, so bedenken wir, daß zuerst das Gradnetz festzulegen, innerhalb desselben die trigonometrischen Punkte, die ursprünglich durch ihre geographischen Koordinaten gegeben, vermöge der aus diesen berechneten ebenen Koordinaten einzuzeichnen sind, und daß die weiteren Details auf Grund der Daten der Topographen der kgl. Landesaufnahme unter steter Berücksichtigung der an-

genommenen Regeln über das Geländezeichnen eingetragen werden. Wir zeigen die *Konstruktion eines Gradnetzes* an einem besonders einfachen Beispiele, nämlich für das am Schlusse des ersten Kapitels besprochene Meßtischblatt „*Teltow*“ (Nr. 1907 bezw. Nr. 21; *Grunewald bei Berlin*). Da die vier Ecken des Blattes durch ihre geographischen Koordinaten gegeben sind, so ist mit der Berechnung der zugehörigen ebenen Koordinaten gezeigt, wie dieselbe sich bei einem einzelnen trigonometrischen Punkte gestaltet.

Das Blatt heiße $ABCD$, und zwar hat

die Süd-West-Ecke A die Koordinaten $52^0\,24'$ nördl. Breite, $30^0\,50'$ östl. Länge,

„ Süd-Ost-Ecke B „ „ $52^0\,24'$ nördl. Breite, 31^0 östl. Länge,

„ Nord-Ost-Ecke C „ „ $52^0\,30'$ nördl. Breite, 31^0 östl. Länge,

„ Nord-West-Ecke D „ „ $52^0\,30'$ nördl. Breite, $30^0\,50'$ östl. Länge.

1) Wir berechnen zuerst die Koordinaten b und l der Ecke A auf der *Gauß*schen Kugel. Nach § 12, Seite 118, Formel X) ist zur Bestimmung von b anzusetzen:

$$B - B_0 = -\,18'2{,}53252''$$

$$= -\,\frac{1082{,}53252}{3600}\ \text{Grad.}$$

Also ist

$$b - b_0 = \Big(-\,359556{,}69447 \cdot \frac{1082{,}53252}{360\,000} + 3041{,}38652 \cdot \frac{1082{,}53252^2}{360\,000^2} + 946{,}26056 \cdot \frac{1082{,}\ldots^3}{360\,000^3}\Big)\ \text{Sekunden}$$

$$b - b_0 = (-\,1081{,}19949 + 0{,}027501 + 0{,}000\,025\,73)\ \text{Sekunden},$$

$$b - b_0 = -\,1081{,}17196'', \quad \text{daher } b = 52^0 21'\,58{,}82804''.$$

Wir wollen aber zweitens auch zeigen, wie die Berechnung von b mit Hilfe der *Schreiber*schen Tafel geführt wird. Die *Tafelwerte* durch *fetten* Druck vor den übrigen auszeichnend, haben wir

$B = 52^0\,24'$

für $b = 52^0\,21'$ ist:

$B = 52^0\,23'\ 1{,}09634''$

$B - B = 58{,}90366''$

$-\ 7561$

$b = 52^0\,21'\,58{,}82805''$

$(B-B)\times D\cdot 1'' - (B-B)\times(D\cdot 1'')^2 = r - s$

$\log D\cdot 1'' = 7{,}10902$ $\qquad 2\cdot D\cdot 17$

$\log(B-B) = 1{,}77014$

$\log r = 8{,}87916;$ $\qquad r = 7571{,}12$

$\log s = 5{,}98818;$ $\qquad s = \quad 9{,}73$

$r - s = 7561{,}39$

$0{,}1$

7561

Auf diesem Wegen gelangt man also schneller und ebenso sicher zum Ziel, wie auf dem vorigen. Weiter ist

$$l = \alpha(L - L_0),$$
$$l = \alpha(30^0\,50' - 31^0),$$
$$l = -\alpha\cdot 10'$$
$$l = -\,10'\,0{,}271\,75''.$$

Ecke A: $b = 52^0\,21'\,58{,}828\,05''$; $\quad l = -\,10'\,0{,}271\,75''$.

Hieraus ergeben sich die sphärischen *rechtwinkligen* Koordinaten durch den Ansatz:

$$\operatorname{tg} b' = \frac{\operatorname{tg} 51^0\,21'\,58{,}828\,05''}{\cos 10'\,0{,}271\,75''},$$

$$b' = 52^0\,21'\,59{,}24''.$$

$$\mathfrak{x} = 52^0\,21'\,59{,}24'' - 52^0\,40',$$
$$\mathfrak{x} = -\,18'\,0{,}76'',$$

also

$$\mathfrak{x} = -\,1080{,}76''.$$

Daher

$$x = \frac{A}{\varrho}\,\mathfrak{x};$$
$$x = -\,33\,444{,}98 \text{ Meter}.$$

Weiter ist

$$\sin\mathfrak{y} = -\cos 52^0\,21'\,58{,}828\,05''\cdot\sin 10'\,0{,}271\,75'';$$
$$\mathfrak{y} = -\,6'\,6{,}532'',$$
$$\mathfrak{y} = -\,366{,}532''.$$

Es ist

$$\eta = \mathfrak{y} + \mathfrak{A}_3\mathfrak{y}^3,$$
$$\eta = -\,366{,}5322''.$$

$$y = \frac{A}{\varrho}\,\eta\,.$$

$$y = -\,11\,342{,}57 \text{ Meter.}$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} c = -\sin 52^0 \ldots \cdot \operatorname{tg} 10'\,0{,}27175''$$

$$c = -\,7'\,55{,}374''.$$

Ecke A: $x = -33\,444{,}98$ m,

$y = -11\,342{,}57$ m. Meridiankonvergenz $c = -7'\,55{,}374''$.

2) Wir berechnen jetzt sehr schnell die ebenen Koordinaten der *Ecke B*. Es ist offenbar

$$b = 52^0\,21'\,58{,}82805''.$$

$$l = 0.$$

Daher ist

$$b' = b.$$

$$\mathfrak{x} = 52^0\,21'\,58{,}82805'' - 52^0\,40',$$

$$\mathfrak{x} = -\,18'\,1{,}17195'',$$

$$\mathfrak{x} = -\,1081{,}17195''.$$

$$x = -\,33\,457{,}77 \text{ Meter.}$$

$$\mathfrak{y} = 0.$$

$$\eta = 0.$$

$$y = 0.$$

Ecke B: $x = -\,33\,457{,}77$ m,

$y = 0$. Meridiankonvergenz $c = 0$.

3) Unter Benutzung der *Schreiber*schen Tafel gestaltet sich die Berechnung der sphärischen Koordinaten der *Ecke C* folgendermaßen:

$B = 52^0 30'$

für $\boldsymbol{b} = 52^0 27'$ ist:

$\boldsymbol{B} = 52^0 29'\ 1{,}55650''$

$B - \boldsymbol{B} = 58{,}44350''$

$- \quad 7403$

$b = 52^0 27'\,58{,}36947''$

$(B-\boldsymbol{B}) \times D \cdot 1'' - (B-\boldsymbol{B}) \times (D \cdot 1'')^3 = r - s$

$\log D \cdot 1'' = 7{,}10318$ $\qquad 2 \cdot D \cdot 16$

$\log (B - \boldsymbol{B}) = 1{,}76674$

$\log r = 8{,}86992;$ $\qquad r = 7411{,}74$

$\log s = 5{,}97310;$ $\qquad s = \quad 9{,}4$

$r - s = 7402{,}34$

$0{,}3$

7403

$$b = 52^0\,27'\,58{,}36947'',$$
$$l = 0.$$

Daher ist

$$b' = b.$$
$$\mathfrak{x} = 52^0\,27'\,58{,}36947'' - 52^0\,40',$$
$$\mathfrak{x} = -\,12'\,1{,}63053'',$$
$$\mathfrak{x} = -\,721{,}63053''.$$
$$x = -\,22\,331{,}462 \text{ Meter.}$$
$$\mathfrak{y} = 0.$$
$$y = 0.$$

Ecke C: $x = -\,22\,331{,}462$ m.
$y = 0.$ Meridiankonvergenz $c = 0.$

4) Für die *Ecke D* ist

$$b = 52^0\,27'\,58{,}36947''$$
$$l = -\,10'\,0{,}27175''$$
$$\operatorname{tg} b' = \frac{\operatorname{tg} 52^0\,27'\,58{,}36947''}{\cos 10'\,0{,}27175''},$$
$$b' = 52^0\,27'\,58{,}78''.$$
$$\mathfrak{x} = 52^0\,27'\,58{,}78'' - 52^0\,40',$$
$$\mathfrak{x} = -\,12'\,1{,}22'',$$
$$\mathfrak{x} = -\,721{,}22''$$
$$x = -\,22\,318{,}761 \text{ Meter.}$$

Weiter ist

$$\sin \mathfrak{y} = -\cos 52^0\,27'\,58{,}36947'' \cdot \sin 10'\,0{,}27175''$$
$$\mathfrak{y} = -\,6'\,5{,}703''$$
$$\eta = -\,365{,}7032''$$
$$y = -\,11\,317 \text{ Meter.}$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg} c = -\sin 52^0\,27'\,58{,}36947'' \cdot \operatorname{tg} 10'\,0{,}27175''$$
$$c = -\,7'\,56{,}012''.$$

Ecke D: $x = -\,22\,318{,}761$ m,
$y = -\,11\,317$ m; Meridiankonvergenz $c = -7'\,56{,}012''.$

Nach den Regeln der analytischen Geometrie der Ebene ist die Entfernung zweier Punkte d bestimmt durch

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Demnach ist der *Südrand* AB unseres Meßtischblattes gegeben durch

$$AB^2 = 12{,}79^2 + 11\,342{,}57^2$$
$$= 11\,342{,}57^2 \left(1 + \left(\frac{12{,}79}{11\,342{,}57}\right)^2\right)$$

$$AB = 11\,342{,}57 \cdot (1 + 0{,}00113^2)^{\frac{1}{2}} \text{ Meter},$$
$$= 11\,342{,}57 \cdot 1{,}000\,000\,638 \text{ Meter}.$$

Südrand $AB = 11\,342{,}577$ m auf der Karte, und andererseits
$= 11\,342{,}650$ m auf dem Sphäroid (I, § 18, S. 62).

Es ist der *Nordrand* CD gegeben durch

$$CD^2 = 12{,}701^2 + 11\,317^2$$
$$CD = 11\,317 \left(1 + \left(\frac{12{,}701}{11\,317}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{m},$$
$$= 11\,317 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{12{,}701}{11\,317}\right)^2\right) \text{ m},$$
$$= 11\,317 \cdot 1{,}000\,000\,629\,778 \text{ m};$$

Nordrand $CD = 11\,317{,}007$ m auf der Karte, und andererseits
$= 11\,317$ m auf dem Sphäroid (I, § 18).

Die von uns durch Messungen auf der Karte auf S. 62 festgestellten Differenzen rühren also nicht von der Projektion, sondern von dem Eingang des Papiers in der Druckerpresse her. Die hier sich zeigenden geringen Differenzen zwischen Wirklichkeit und Kartenbild wiederholen sich bei allen Meßtischblättern und haben zu der für die Topographen der kgl. Landesaufnahme geltenden Instruktion geführt: *Der Nord- und der Südrand der Karte sind als gerade Linien auszuziehen.*

Der *Ostrand* BC ergibt sich als

$11\,126{,}31$ m auf der Karte

gegen

$11\,126{,}3108$ auf dem Sphäroid;

er zeigt als Stück des Hauptmeridians die Projektion von ihrer besten Seite.

Der *Westrand* AD ist gegeben durch

$$AD^2 = 11\,126{,}219^2 + 25{,}57^2$$
$$AD = 11\,126{,}219 \cdot \left(1 + \left(\frac{25{,}57}{11\,126{,}219}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{m},$$
$$= 11\,126{,}219 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}0023^2\right) \text{ m},$$

Westrand $AD = 11\,126{,}2484$ m auf der Karte und andererseits
$= 11\,126{,}3108$ m auf dem Sphäroid (I, § 18).

Die von uns durch Messungen auf der Karte beobachteten Differenzen rühren demnach nur von einer Dehnung des Papiers in der Nord-Süd-Richtung her.

Eigentlich müßte der Westrand der Karte als das Bild eines Meridians eine gekrümmte Linie sein, da nur Kugelkleinkreise, deren Ebenen parallel dem Hauptmeridian gehen, sich in der Projektion als gerade Linien darstellen. Die Differenz der beiden von uns berechneten Meridiankonvergenzen

$$-7'\,55{,}374'' - (-7'\,56{,}012'') = 0{,}638''$$

gibt den Richtungsunterschied an, den eine in A an das wahre (gekrümmte) Bild des Meridians gelegte Tangente bildet mit der in D gezogenen Tangente. Er ist so klein, daß auch hier sofort der Grund einleuchtet, warum man in allen Karten den Ost- und den Westrand als gerade Linien auszieht.

Man wird hieran anschließend die Lage aller trigonometrischen Punkte, die innerhalb des Blattes liegen, berechnen und sie in das Blatt eintragen; man wird endlich den sphäroidischen Inhalt des Meßtischblattes (I, § 18, S. 61)

$$M = 126{,}0595 \text{ qkm}$$

in Vergleich stellen mit dem Flächeninhalt des ebenen Kartenblattes

$$M' = \tfrac{1}{2}(11\,342{,}577 + 11\,317{,}007) \cdot 11\,126{,}219 \text{ qm}$$
$$M' = 126{,}05775 \text{ qkm},$$

um in einfacher Weise einen Einblick in die durch die Projektion hervorgerufenen Verzerrungen zu erhalten.

Wenn wir hiermit unsere Betrachtungen schließen, so glauben wir den Zugang zum Verständnis dieses großartig angelegten Kartenwerkes und dieses von echt deutschem Geiste getragenen Unternehmens erleichtert zu haben.

Besselsche Werte der Erddimensionen nebst den zugehörigen Logarithmen.

$a = 6\,377\,397{,}155$ m	$\log a = 6{,}804\,643\,4637$
$b = 6\,356\,078{,}963$ m	$\log b = 6{,}803\,189\,2839$
$\frac{a^2}{b} = c = 6\,398\,786{,}849$ m	$\log c = 6{,}806\,097\,6435$
$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varepsilon^2 = 0{,}006\,674\,3722$	$\log \varepsilon^2 = 0{,}824\,410\,4237 - 3$
$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \varepsilon_1{}^2 = 0{,}006\,719\,2188$	$\log \varepsilon_1{}^2 = 0{,}827\,318\,7833 - 3$
$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{299{,}152\,8128}$	
$\alpha = 0{,}003\,342\,7732$	$\log \alpha = 0{,}524\,106\,9093 - 3$
$\frac{a - b}{a + b} = n = 0{,}001\,674\,1848$	$\log n = 0{,}223\,803\,3949 - 3$
$1 - \varepsilon^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_1{}^2} = 0{,}993\,325\,6278$	$\log (1 - \varepsilon^2) = 0{,}997\,091\,6404 - 1$
$\frac{1}{1 - \varepsilon^2} = 1 + \varepsilon_1{}^2 = 1{,}006\,719\,2188$	$\log (1 + \varepsilon_1{}^2) = 0{,}002\,908\,3596$
$\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2}} = 0{,}996\,657\,2269$	$\log \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0{,}998\,545\,8202 - 1$
$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2} = 1{,}003\,353\,9848$	$\log \sqrt{1 + \varepsilon_1{}^2} = 0{,}001\,454\,1798$
1 Meter = 0,513 074 074 Toisen	$\log (M, T) = 0{,}710\,180\,07 - 1$
1 Toise = 1,949 036 310 Meter	$\log (T, M) = 0{,}289\,819\,93.$

91917
Haentzschel, Emil Esaias Rudolf
Das Erdsphäroid und seine Abbildung.
G
H

UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY

DO NOT
REMOVE
THE
CARD
FROM
THIS
POCKET